Danmarks Statistik
MODELGRUPPEN

Arbejdspapir*

Per Bremer Rasmussen

26. April 1992

Translog-omkostningsfunktioner: Teoretiske egenskaber, og opstilling af estimationsligninger

Resumé:

Der fokuseres på opstilling af estimerbare faktorefterspørgselsfunktioner baseret på Translogfunktionen.

Det begrundes ganske kort, hvorfor det kunne være attraktivt at tage udgangspunkt i en fleksibel funktionsform ved modellering af faktorefterspørgselsfunktionerne, og Translogfunktionen vælges i første omgang, fordi den formodentlig har et tilfredsstillende teoretisk konsistensområde, og ved Monte Carlo-forsøg har vist sig bedre end konkurrenterne til at approksimere, hvis der er betydelig faktorsubstitution.

Det diskuteres mere udførligt, hvordan teoretiske konsistensegenskaber kan pålægges funktionen, og hvordan det betydelige antal parametre, der er den væsentligste hage ved anvendelse af fleksible funktionsformer, i øvrigt kan reduceres.

---

c:\tekst\phd\tl-32.wp

Nøgleord: Fleksible funktionsformer, produktionsfunktioner, omkostningsfunktioner, faktorefterspørgsel, translog.

Indhold.

1. Indledning

Translogfunktionen, kan betragtes som en 2.-ordens logaritmisk taylorapproksimation til en vilkårlig ukendt funktion. Lad

$$C(y,p,t) = \min_x\{p'x \; ; \; x \in \{x \; ; \; f(x) \geq y\}\} \tag{1}$$

betegne omkostningsfunktionen, hvor y er produktionen, p en vektor af faktorpriser, f produktionsfunktionen og t en tidsvariabel, der skal fange eventuelle tekniske fremskridt.

Translogomkostningsfunktionen bliver da, forudsat rækkeudviklingen foretages i punktet: $(p^*,y^*,t^*) = (1,1,0)$:

$$\begin{aligned} \ln C(y,p,t) = {} & a_0 + \sum_i a_i \ln p_i + a_y \ln y + a_t t + \frac{1}{2}\sum_j \sum_i b_{ij} \ln p_i \ln p_j \\ & + \sum_i b_{yi} \ln y \ln p_i + \frac{1}{2} a_{yy} (\ln y)^2 + \sum_i b_{ti} t \ln p_i \\ & + b_{ty} t \ln y + \frac{1}{2} a_{tt} t^2 \end{aligned} \tag{2}$$

Symmetribetingelsen $b_{ij} = b_{ji}$ følger umiddelbart, da disse parametre er de 2. ordens afledte af omkostningsfunktionen mht. priserne:

$$b_{ij} = \frac{\partial^2 \ln C}{\partial \ln p_i \partial \ln p_j} = \frac{\partial^2 \ln C}{\partial \ln p_j \partial \ln p_i} = b_{ji}$$

Translogfunktionen tilhører gruppen af såkaldte fleksible funktionsformer, dvs. funktioner, der i en ganske bestemt forstand er fleksible nok til at kunne approksimere vilkårlige funktioner.

Fleksible funktioner vil blive gennemgået i et andet notat, så her skal ikke gås i detaljer. Ved fleksibilitet forstås evnen til ved passende valg af parametre, at kunne approximere en vilkårlig men teoretisk konsistent adfærd. For *givne værdier af de forklarende variabler* skal det altså være muligt at vælge parametre, så der kan opnås vilkårlige men teoretisk konsistente værdier af økonomisk interessante størrelser. I forbindelse med omkostningsfunktioner (faktorefterspørgselsfunktioner) er de økonomisk interessante størrelser dels de samlede omkostninger, dels faktorefterspørgslerne og disses følsomhed overfor ændringer i de forklarende variabler, herunder fx. substitutionselasticiteter, skalaelasticiteter mm. Med andre ord: niveauet samt 1. og 2. ordens afledte af omkostningsfunktionen. Er omkostningsfunktionen udledt ved omkostningsminimering på baggrund af givne faktorpriser, en given produktion og et konvekst produktionsmulighedsområde vil den overholde en række teoretiske egenskaber. Teoretisk konsistente omkostningsfunktioner er funktioner, der opfylder disse egenskaber.

Fordelen ved fleksible funktionsformer er, at der ikke på forhånd pålægges begrænsninger på økonomisk interessante parametre, i modsætning til fx. CES og Cobb-Douglass (CD) funktioner, hvor det som bekendt bl.a. antages apriori, at substitutionselasticiteten er konstant hhv. lig 1.

Ulempen er, at fleksibilitet typisk kræver flere parametre og opnås på bekostning af en begrænsning af, hvad man kunne kalde konsistensområdet (på engelsk: Domain of applicability). Ovenfor defineredes fleksibilitet for *givne* værdier af de forklarende variabler. Man kan altså ikke være sikker på, at funktionen vil være teoretisk konsistent for andre værdier af disse. Faktisk kan man være sikker på, at der findes værdier af de forklarende variabler, der gør den fleksible funktion teoretisk inkonsistent. Her findes en umulighedssætning: Det kan nemlig vises, at ingen fleksibel funktion er generelt konsistent[1]. Det kan interessant nok også vises, at CES-funktionen er den mest fleksible funktionsform, der er generelt konsistent[2]. Der er lavet en række undersøgelser, der søger at illustrere, hvor stort konsistensområdet er. De tyder på, at man, hvis man befinder sig i et område, hvor substitutionselasticiteterne ikke er for langt fra 1, skal bevæge sig langt væk fra rækkeudviklingspunktet før funktionen bliver teoretisk inkonsistent.

TL-funktionen kan *approksimere* en CES-teknologi lokalt, jf. afsnit 5.3; mens CD-teknologien udgør et specialtilfælde. I en CD-teknologi, hvor der er mulighed for teknisle fremskridt[3], og hvor der ikke er forudsat konstant skalaafkast:

$$y = Ae^{-bt} \prod_i x_i^{a_i}$$

er logaritmen til minimumsomkostningsfunktionen:

$$\ln C = a_0 + \frac{1}{\sum_j a_j} \sum_i a_i \ln p_i + \frac{1}{\sum_j a_j} \ln y - \frac{b}{\sum_j a_j} t$$

som kan fås som specialtilfælde af (2) ved at sætte koefficienten til alle 2.-ordens leddene til 0. En CD-funktion kan altså alternativt betragtes som en 1.-ordens logaritmisk taylorapproksimation til en vilkårlig omkostningsfunktion.

Ved differentiation af logaritmen til omkostningsfunktionen (2) mht. logaritmen til faktorpriserne fås ved anvendelse af Shephards lemma de tilsvarende omkostningsandele s_i:

[1]jf. Lau (1986).

[2]jf. Lau (1986).

[3]I en CD-teknologi er alle former for tekniske fremskridt både Hicks-, Harrod- og Solow-neutrale.

$$\frac{\partial \ln C}{\partial \ln p_i} = \frac{\partial C}{\partial p_i}\frac{p_i}{C} = \frac{x_i p_i}{C} \doteq s_i = a_i + \sum_j b_{ij} \ln p_j + b_{yi} \ln y + b_{ti} t \tag{3}$$

Det behagelige ved (3) er, at de optimale faktorandele er givet som funktioner af priser, produktion og trend, der er lineære i parametrene. (3) kan i princippet estimeres direkte i en sammenhæng, hvor der gives mulighed for eventuel træghed i tilpasningen til de optimale faktorandele. Det kunne fx. gøres i en fejlkorrektionsmodel, hvor (3) repræsenterer kointegrationssammenhængen.

Det ses iøvrigt direkte af (3), at med passende parameterrestriktioner vil omkostningsandelene være konstante - et af kendetegnene ved CD-funktionen.

2. Teoretiske restriktioner.

Problemet er imidlertid, at vi ikke umiddelbart kan være sikre på, at (1) beskriver en pæn minimumsomkostningsfunktion, hvilket vil sige, at funktionen repræsentererden bagvedliggende teknologi, jf. dualitetsresultatet. Funktionen $C(y,p,t)$ skal generelt være:

(1) positiv real, defineret og endelig for alle $y > 0$

(2) ikke aftagende i y, kontinuert mod venstre og:
$C(y,p,t) \rightarrow \infty$ *for* $y \rightarrow \infty$

(3) ikke aftagende i p

(4) lineær homogen (dvs. homogen af 1. grad) i p for givet y

(5) konkav i p for $y > 0$

Som omtalt ovenfor, kan vi være sikre på, at TL-funktionen ikke opfylder disse betingelser for vilkårlige værdier af de forklarende variabler. Alt, hvad vi kan gøre, er at pålægge parameterrestriktioner eller teste disse i det punkt, hvor funktionen er rækkeudviklet. TL-funktionen vil være en teoretisk konsistent funktion i en større eller mindre omegn af dette punkt. Der vil derfor i det følgende blive brugt ordet konsistens i betydningen lokal konsistens. Lad rækkeudviklingen af funktionen være foretaget i punktet:

$(p^*,y^*,t^*) = (1,1,0)$

hvor C er positiv, får vi at:

(1) er opfyldt ved den logaritmiske specifikation

(2) implicerer $\frac{\partial C}{\partial y} = \frac{\partial \ln C}{\partial \ln y}\frac{C}{y} \geq 0 \Rightarrow \frac{\partial \ln C}{\partial \ln y} \geq 0 \quad da\ C \geq 0$

og vi evaluerer i $y = 1$. Vi får derfor:

$$\frac{\partial \ln C}{\partial \ln y} = a_y + \sum_i b_{iy} \ln p_i^* + a_{yy} \ln y^* + b_{ty} t^* = a_y \geq 0$$

(3) implicerer $\frac{\partial C}{\partial p_i} = \frac{\partial \ln C}{\partial \ln p_i}\frac{C}{p_i} \geq 0 \quad for\ C > 0\ og\ p_i > 0$

og vi har:

$$\frac{\partial \ln C}{\partial \ln p_i} = s_i^* = a_i + \sum_j b_{ij} \ln p_j^* + b_{yi} \ln y^* + b_{ti} t^* = a_i \geq 0$$

(4) kan sikres både lokalt men også globalt. Global sikring af homogenitetsbetingelsen viser sig at være ækvivalent med global sikring af sumrestriktionen på de enkelte omkostningsandele. Homogenitet af 1. grad i priserne implicerer:

$$\sum_i p_i \frac{\partial C}{\partial p_i} = \sum_i p_i x_i = C \quad \Rightarrow$$

$$\sum_i \frac{p_i x_i}{C} = \sum_i s_i = 1$$

hvilket jo præcis er adding up betingelsen. Hvis vi introducerer stokastiske restled ϵ_{it} i de enkelte omkostningsandelsfunktioner, og

$$\sum_i s_i = \sum_i a_i + \sum_i \sum_j b_{ij} \ln p_j + \sum_i b_{yi} \ln y + \sum_i b_{ti} t + \sum_i \epsilon_{it} = 1$$

skal gælde for samtlige værdier af de forklarende variabler, skal flg. parameterrestriktioner være opfyldt:

$$\sum_i a_i = 1$$

$$\sum_i b_{ij} = \sum_j b_{ij} = 0, \quad da\ b_{ij} = b_{ji}$$

$$\sum_i b_{yi} = 0$$

$$\sum_i b_{ti} = 0$$

$$\sum_i \epsilon_{it} = 0$$

(5) er ensbetydende med, at matricen $\frac{\partial^2 C}{\partial p \partial p'}$ er negativ semidefinit, dvs:

$$\forall\ \alpha \in \mathbf{R}^n :\quad \alpha' \frac{\partial^2 C}{\partial p \partial p'} \alpha \leq 0$$

Matricen $\frac{\partial^2 C}{\partial p \partial p'}$ har følgende karakteristiske elementer:

$$\frac{\partial^2 C}{\partial p_i \partial p_j} = \frac{C}{p_i p_j}\left[b_{ij} + s_i s_j\right]$$

$$\frac{\partial^2 C}{\partial p_i^2} = \frac{C}{p_i^2}\left[b_{ii} + s_i(s_i - 1)\right]$$

dvs. vi kan skrive:

$$\frac{\partial^2 C}{\partial p \partial p'} = C\hat{P}^{-1}\left[B + ss' - \hat{S}\right]\hat{P}^{-1}$$

hvor $\hat{X}$ betegner diagonalmatricen med vektoren x i diagonalen. Konkavitetskravet er altså:

$$\forall\ \alpha \in \mathbf{R}^n :\quad \alpha'\hat{P}^{-1}\left[B + ss' - \hat{S}\right]\hat{P}^{-1}\alpha \leq 0$$

hvilket vil sige, at matricen $\left[B + ss' - \hat{S}\right]$ skal være negativ semidefinit. Det er den, hvis både B og $ss' - \hat{S}$ er det (tilstrækkelig men ikke nødvendig betingelse), og da $ss' - \hat{S}$ er negativ semidefinit[4], kunne vi altså nøjes med at kræve, at B er negativ semidefinit. Dette er som sagt ikke nødvendigt for lokal konkavitet; men sikrer på den anden side at konkavitetskravet gælder globalt. Alternativt kan vi betragte matricerne i rækkeudviklingspunktet, hvor:

$$B + ss' - \hat{S} = B + aa' - \hat{A}$$

---

[4]Omkostningsandelene $1 \geq s_i \geq 0$ betyder, at elementerne udenfor diagonalen $s_i s_j$ er positive, mens diagonalelementerne $s_i(s_i - 1)$ er negative.

Da matricerne er symmetriske, kan vi foretage choleski-dekomponering:

$$B + aa' - \hat{A} = LDL' \tag{4}$$

hvor L er en nedre triangulær matrix med 1 i diagonalen og D en diagonalmatrix. Konkavitet kræver nu, at samtlige diagonalelementer i D er negative eller lig 0. Det ses umiddelbart, at (4) alene er en reparametrisering, der gør det lettere at pålægge konkavitetsrestriktionen samtidig med, at symmetribetingelsen formuleres eksplicit.

Pålægning af konkavitetsrestriktionen kan gøres ved kvadrering af parametrene, dvs. erstatte elementerne i D: d_i med $-\delta_i^2$ estimationsproceduren. Symmetribetingelsen, der indebærer, at

$$B = LDL' - aa' + \hat{A}$$

giver anledning til et estimationsproblem, der er ikke-lineært i parametrene. Der tilbagestår nu at pålægge matricerne L eller D de restriktioner, der blev pålagt B for at sikre at omkostningsfunktionen er lineær og homogen af 1. grad. Kravet var:

$$\sum_i b_{ij} = 0 \quad for\ j=1,\ldots,n$$

$$\Leftrightarrow$$

$$\begin{aligned} i'B &= i'LDL' - i'aa' + i'\hat{A} \\ &= i'LDL' = 0 \end{aligned}$$

hvor sidste lighedstegn skyldes, at $i'a=1$. Dvs. søjlerne (eller rækkerne i LDL' skal summe til 0. Som vist i appendiks 1, er dette tilfældet når:

$$\sum_i \lambda_{ij} = 0 \ \vee \ d_j = 0 \quad for\ j=1,\ldots,n-1 \ \wedge \ d_n = 0$$

Det ses også, at for $d_j = 0$ gælder λ_{ij} ikke indgår i LDL' og disse kan derfor udelades af estimationsproblemet.

Konsistensbetingelserne (1) - (5) betyder bla., at ligningssystemet er singulært og vi kan under visse forudsætninger nøjes med at estimere de n-1 omkostningsandelsfunktioner med symmetrirestriktioner og de restriktioner, der iøvrigt ligger på **D** og **L** matricerne, jf. appendix 1.

3. Yderligere restriktioner på produktionsteknologien.

De nævnte restriktioner i foregående afsnit, er restriktioner, der følger af, at vi betragter omkostningsfunktionen som minimumsomkostningsfunktionen, givet et konvekst produktionsmulighedsområde. Der kan overvejes yderligere restriktioner på produktionsteknologien, der kan begrænse antallet af frie parametre.

3.1. Homotetisk produktionsfunktion.

En homotetisk produktionsfunktion implicerer, at faktorforholdet er uafhængigt af produktionsomfanget, eller sagt på en anden måde, at ekspansionsvejen er lineær. Formelt betyder det, at der eksisterer en funktion θ med $\theta' > 0$, således at:

$$\theta(y) = \theta[f(x)] = g(x)$$

hvor g er en positiv lineær homogen funktion af x. Eksisterer en sådan funktion, har vi set fra omkostningssiden:

$$\begin{aligned} C(y,p,t) &= \min_x [p'x \mid f(x) \geq y] \\ &= \min_x [p'x \mid \theta[f(x)] \geq \theta(y)] \\ &= \theta(y) \min_x \left[p' \frac{x}{\theta(y)} \;\middle|\; \frac{\theta[f(x)]}{\theta(y)} \geq 1 \right] \\ &= \theta(y) \min_{x^*} [p'x^* \mid g(x^*) \geq 1] \;\wedge\; x^* = \frac{x}{\theta}(y) \\ &= \theta(y) c(p,t) \end{aligned} \tag{5}$$

hvor ***c(p,t)*** er enhedsomkostningsfunktionen. Homotecitet medfører, at vi kan skrive omkostningsfunktionen som[5]:

$$\ln C(p,y,t) = \ln\theta(y) + \ln c(p,t)$$

Det betyder specielt for TL-omkostningsfunktionen (1), at

$$\frac{\partial^2 \ln C}{\partial \ln y \, \partial t} = b_{ty} = 0$$

$$\frac{\partial^2 \ln C}{\partial \ln y \, \partial \ln p_i} = b_{yi} = 0 \quad for \; i=1,\dots,n$$

[5]Omkostningsfunktionen bliver altså seperabel i produktion på den ene side og priser og trend på den anden side.

3.2. Homogenitet.

Homotecitet er et svagere krav end homogenitet. Antages omkostningsfunktionen homogen af grad λ i y, vil det sige, at omkostningerne skal stige med λ pct. når y stiger med 1 pct.. Dvs:

$$\ln C(y,p,t) = \lambda \ln y + \ln c(p,t) \tag{4}$$

Homogenitet af C af grad λ svaret til homogenitet af grad $1/\lambda$ af produktionsfunktionen. (4) implicerer nu:

$$\frac{\partial^2 \ln C}{\partial \ln y^2} = a_{yy} = 0$$

og homogenitet af 1. grad (dvs. konstant skalaafkast) giver specielt:

$$\frac{\partial \ln C}{\partial \ln y} = a_y = \lambda = 1$$

3.3. Parameterregnskab.

Vi kan nu opstille flg. parameterregnskab:

Parametre	Antal frie parametre i TL-funktionen, givet			Kan estimeres i s_i-funktionerne
	Konsistens (1)	(1)+homotecitet (2)	(1)+(2)+CRS (3)	
a_0	1	=(1)	=(1)	-
a_i	n-1	=(1)	=(1)	+
a_y	1	=(1)	0	-
a_t	1	=(1)	=(1)	-
b_{ij}	n(n-1)/2	=(1)	=(1)	+
b_{yi}	n-1	0	=(2)	+
b_{ti}	n-1	=(1)	=(1)	+
b_{ty}	1	0	=(2)	-
a_{yy}	1	=(1)	0	-
a_{tt}	1	=(1)	=(1)	-
Ialt for n=5: for n=4:	 28 20	 23 16	 21 14	

Det fremgår af sidste søjle i tabellen, at der er en række parametre, der ikke kan identificeres ud fra omkostningsandelsfunktionerne alene. Det drejer sig om a_0, a_y, a_t, b_{ty}, a_{yy} og a_{tt}. Det betyder, at vi ikke kan nøjes med at estimere andelsfunktionerne. Vi er i sidste instans interesserede i faktorefterspørgselsfunktionerne

$$x_i = s_i \frac{C}{p_i}$$

så selv om de helt centrale parametre vedr. faktorsubstitution er givet ud fra omkostningsandelsfunktionerne, kan vi altså ikke komme til faktorefterspørgselsfunktionerne uden samtlige parametre i omkostningsfunktionen.

4. Estimation af parametre, der ikke indgår i andelsfunktionerne.

En meget stor del af de studier af produktionsteknologier, der er baseret på TL-funktionen, har ikke modellering af makroøkonomiske adfærdsrelationer for øje; men beskæftiger sig alene med fx. mål for fatorsubstitution. De har derfor ikke behov for at identificere samtlige parametre i omkostningsfunktionen.[6]

Der er i hvert fald 2 måder at få identificeret de resterende parametre på. Den ene - og langt den mest besværlige - er anvendt i Lesuis (1991). Metoden går ud på at udnytte det faktum, at en del af de manglende parametre refererer til modelleringen af tekniske fremskridt. Fra (1) har vi den tekniske fremskidtsrate *rtp*:

$$rtp = \frac{\partial \ln C}{\partial t} = a_t + a_{tt}t + \frac{1}{2}\sum_i b_{ti}\ln p_i + \frac{1}{2}b_{ty}\ln y$$

som viser forskydningen af omkostningsfunktionen pr. tidsenhed for givne faktorpriser og produktion; men som udmærket kan være funktion af disse.

$$a_t + a_{tt}t =$$

autonome tekniske fremskridt (neutrale i Hicks forstand)

$$\frac{1}{2}\sum_i b_{ti}\ln p_i + \frac{1}{2}b_{ty}\ln y =$$

faktorforbrugende/-besparende (biased) tekniske fremskridt. Dvs. fremskridt, der vrider faktorforholdene. Bemærk, at antagelsen om homotetisk produktionsstruktur fører til $b_{yi} = 0$ og $b_{ty} = 0$, og dermed at de biased tekniske fremskridt kommer ind via. b_{ti}

Lesuis udnytter (5) i estimation sammen med omkostningsandelsfunktionerne ved at konstruere et index for ***rtp***. Herved kan samtlige parametre estimeres - bortset fra konstantleddet - forudsat konstant skalaafkast. Det er oplagt at udnytte information om de tekniske fremsktidt. Det er mindre oplagt, at man har denne information. Muligvis er Lesuis tvunget til at anvende denne metode pga. den måde han konstruerer de samlede omkostninger på.

Et mere direkte "alternativ", givet vores konstruktion af omkostningsdata, er at modellere de n-1 andelsfunktioner direkte sammen med omkostningsfuntionen. Hermed udnyttes den information der ligger i de enkelte omkostningsandelsfunktioner (det faktum at vi ved, at omkostningsandelene er den logaritmiske afledte af C mht. faktorpriserne og at vi har data herfor) samtidig med den information der ligger i den samlede omkostningsfunktion. Bemærk, at der ikke er noget i vejen for yderligere at supplere med Lesuis' metode; men det kræver at vi bruger ressourcer på at konstrure de nødvedige (Tørnqvist-) indeks for den tekniske fremskridtsrate.

[6]Et eksempel herpå er Otto (1986)

5. Yderligere restriktioner (2).

5.1. Om substitutionselasticiteter.

Substitutionselasticitetsbegrebet er bestemt ikke entydigt, og da der en tradition for, at man benytter et begreb i lærebøgerne og et andet i den empiriske litteratur, hvor der typisk opereres med mere end 2 produktionsfaktorer, er det måske formålstjenligt at diskutere begreberne og disses sammenhæng. Der anvendes endvidere et par omskrivninger i dette papir, som gør det lettere at udregne substitutionselasticiteterne i praksis, når der er taget udgangspunkt i en TL-omkostningsfunktion. Disse vil også blive gennemgået her.

I lærebøger i vækstteori, hvor der typisk alene opereres med 2 produktionsfaktorer (kapital og arbejdskraft), vises ofte Hicks substitutionselasticiteten, der givet en produktionsfunktion $y = f(x_1,x_2)$ formelt er defineret som:

$$\sigma_{12} = -\frac{\partial\left(\frac{x_1}{x_2}\right)/\left(\frac{x_1}{x_2}\right)}{\partial\left(\frac{f_1}{f_2}\right)/\left(\frac{f_1}{f_2}\right)} \approx \frac{\partial\log\left(\frac{x_1}{x_2}\right)}{\partial\log\left(\frac{f_2}{f_1}\right)} \tag{12}$$

hvor f_i betegner den partielle afledte mht den i'te produktionsfaktor. Defineret på denne måde udtrykker den et mål for de tekniske substitutionsmuligheder mellem to produktionsfaktorer, mens der ikke er gjort nogle antagelser om den økonomiske adfærd hos den betragtede økonomiske enhed. Forudsættes som her omkostningsminimering til givne faktorpriser fås naturligvis:

$$\sigma_{12} = \frac{\partial\log\left(\frac{x_1}{x_2}\right)}{\partial\log\left(\frac{p_2}{p_1}\right)} \tag{13}$$

idet vi konsekvent approksimerer procentvise ændringer med logændringer. Der er naturligvis ikke noget i vejen for at generalisere begrebet til et vilkårligt antal produktionsfaktorer. Det er af flere grunde, som vil blive skitseret nedenfor, blot ikke hensigtsmæssigt. Det generaliserede begreb viser sig ikke at være entydigt, samt at være mere kompliceret at anvende i praksis. I stedet anvendes den såkaldte *Allen partielle substitutionselasticitet*. Den kan defineres på flere måder; men den simpleste er:

$$AES_{ij} = \frac{\partial\log x_i}{\partial\log p_j}\frac{1}{s_j} \tag{14}$$

hvor s_j er omkostningsandelen af faktor j (den faktor hvor prisen ændres).

Disse to begreber er væsensforskellige, og det er ikke umiddelbart oplagt, hvordan de hænger sammen. De to begreber bliver ens ved specialtilfældet med 2 produktionsfaktorer; men Allen elasticiteten kan ikke betragtes som en generalisering af Hicks elasticiteten til mere end 2 faktorer. Det kan være hensigtsmæssigt at systematicere begreberne lidt, bla. for at se dette.

5.1.i. Hvad holdes konstant?

De mange substitutionselasticitetsbegreber kan rubriceres afhængigt af, hvad der tillades at variere, når faktorpriserne ændres. Der findes mindst 3 muligheder på markedet:

1) Produktionen holdes konstant
2) De samlede omkostninger holdes konstant
3) Marginalomkostningerne holdes konstant

Der eksisterer smukke sammenhænge mellem de 3 begreber, og under visse omstændigheder vil de være ækvivalente; men da kun den første gruppe implicerer, at vi under alle omstændigheder befinder os på isokvanterne, vil vi alene betragte begreber af denne type.

5.1.ii. Den direkte substitutionselasticitet

Udover at holde enten produktion, samlede omkostninger eller marginalomkostninger konstante, kan man også vælge at betragte substitutionsmulighederne hvor en eller flere af produktionsfaktorerne holdes konstante. Det kunne være relevant i situationer, hvor der er begrænsninger i mulighederne for at tilpasse samtlige produktionsfaktorer. Den *direkte* substitutionselasticitet er defineret som elasticiteten mellem to faktorer givet indsatsen af samtlige øvrige faktorer. I tilfældet med to faktorer er der ingen forskel mellem den direkte og den "almindelige" substitutionselasticitet.

5.1.iii. Hvilke priser ændres og hvilke faktorer betragtes?

Der sondres mellem *partielle* og *totale* elasticiteter. Iflg. Mundlak (1963) er totale elasticiteter, elasticiteter hvor samtlige faktorpriser tillades at variere. I tilfældet med 2 faktorer er Hicks-elasticiteten total, mens dette ikke er tilfældet for generalisering af begrebet til et vilkårligt antal faktorer, jf. nedenfor.

Indenfor gruppen af partielle elasticiteter findes i hvert fald 3 væsensforskellige begreber:

1) "1 faktor 1 pris", som tager udgangspunkt i størelsen

$$H_i^j \triangleq E_{ij} \triangleq \frac{\partial \log x_i}{\partial \log p_j} = s_j AES_{ij}$$

2) "2 faktorer 1 pris", som tager udgangspunkt i størelsen

$$H_{ir}^j \triangleq \frac{\partial \log\left(\frac{x_i}{x_r}\right)}{\partial \log p_j} = E_{ij} - E_{rj} = s_j(AES_{ij} - AES_{rj})$$

3) "2 faktorer 2 priser", som tager udgangspunkt i størrelsen

$$H_{ir}^{js} \triangleq \frac{\partial \log\left(\frac{x_i}{x_r}\right)}{\partial \log\left(\frac{p_j}{p_s}\right)}$$

som for (i,r) = (j,s) kan skrives som:

$$\begin{aligned}
H_{ij} \triangleq \frac{\partial \log\left(\frac{x_i}{x_j}\right)}{\partial \log\left(\frac{p_j}{p_i}\right)} &= \frac{\partial \log x_i}{\partial \log\left(\frac{p_j}{p_i}\right)} - \frac{\partial \log x_j}{\partial \log\left(\frac{p_j}{p_i}\right)} \\
&= \frac{\partial \log x_i}{\partial \log p_i} \frac{\partial \log p_i}{\partial \log\left(\frac{p_j}{p_i}\right)} + \frac{\partial \log x_i}{\partial \log p_j} \frac{\partial \log p_j}{\partial \log\left(\frac{p_j}{p_i}\right)} \\
&\quad - \left[\frac{\partial \log x_j}{\partial \log p_i} \frac{\partial \log p_i}{\partial \log\left(\frac{p_j}{p_i}\right)} + \frac{\partial \log x_j}{\partial \log p_j} \frac{\partial \log p_j}{\partial \log\left(\frac{p_j}{p_i}\right)}\right] \\
&= \left[E_{ii} - E_{ji}\right] \frac{\partial \log p_i}{\partial \log\left(\frac{p_j}{p_i}\right)} + \left[E_{ij} - E_{jj}\right] \frac{\partial \log p_j}{\partial \log\left(\frac{p_j}{p_i}\right)} \\
&= \left[AES_{ii} - AES_{ji}\right] s_i \frac{\partial \log p_i}{\partial \log\left(\frac{p_j}{p_i}\right)} + \left[AES_{ij} - AES_{jj}\right] s_j \frac{\partial \log p_j}{\partial \log\left(\frac{p_i}{p_j}\right)}
\end{aligned}$$

Det ses, at dette begreb, der kan betragtes som en generalisering af Hicks substitutionselasticiteten, lider af den svaghed, at det afhænger af, hvordan en given ændring i de relative faktorpriser er sammensat. Det er altså ikke lige meget, om en ændring i den relative pris er fremkommet via et fald i den ene pris eller en tilsvarende relativ stigning i den anden pris.

Hertil kommer, at begrebet jo er noget mere kompliceret end Allen elasticiteten, og at Allen elasticiteten har den dyd, at den er let at beregne i en række velkendte funktioner.

De to begreber er dog lig hinanden i specialtilfældet med 2 produktionsfaktorer. Da faktorefterspørgselsfunktionerne er homogene af 0'te grad i faktorpriserne:

$$\sum_j \frac{\partial \log x_i}{\partial \log p_j} = \sum_j E_{ij} = 0$$

fås i tilfældet med 2 produktionsfaktorer:

$$E_{11} = -E_{12}$$
$$E_{22} = -E_{21}$$

som indsat i udtrykket for $\frac{\partial \log(x_i/x_j)}{\partial \log(p_j/p_i)}$ giver:

$$\frac{\partial \log\left(\frac{x_i}{x_j}\right)}{\partial \log\left(\frac{p_j}{p_i}\right)} = (E_{21} + E_{12}) = s_1 AES_{21} + s_2 AES_{12} = (s_1+s_2) AES_{12} = AES_{12}$$

5.1.iv. Allen substitutionselasticiteter i TL-omkostningsfunktionen

I tilfældet med en TL-omkostningsfunktion, kan den partielle Allen elasticitet udtrykkes specielt simpelt. Fra (3) har vi:

$$\frac{\partial s_i}{\partial \log p_j} = b_{ij} = \frac{p_i}{\sum p_h x_h}\frac{\partial x_i}{\partial \log p_j} - \frac{p_i x_i}{(\sum p_h x_h)^2}\frac{\partial \sum p_h x_h}{\partial \log p_j}$$
$$= s_i \frac{\partial \log x_i}{\partial \log p_j} - \frac{s_i}{C} C \frac{\partial \log C}{\partial \log p_j} = s_i \frac{\partial \log x_i}{\partial \log p_j} - s_i s_j$$
$$\Leftrightarrow AES_{ij} \triangleq \frac{\partial \log x_i}{\partial \log p_j}\frac{1}{s_j} = \frac{b_{ij} + s_i s_j}{s_i s_j}$$

Dette resultat kan naturligvis også udledes ud fra sammenhængen:

$$AES_{ij} = \frac{f_i f_j}{f_{ij} f} = \frac{C C_{ij}}{C_i C_j}$$

hvor begge formler dog forudsætter konstant skalaafkast.

5.2. Separabilitetsrestriktioner i TL-omkostningsfunktionen

Der sondres normalt mellem 2 separabilitetsbegreber, svag og streng (additiv) separabilitet. Det interessante begreb i denne sammenhæng er svag separabilitet, og der vil fremover blot blive refereret til dette begreb som separabilitet. Begrebet er interessant, fordi det implicerer, at omkostningsminimering-/profitmaksimeringsprocessen kan opdeles i delproblemer, hvor man kan finde det optimale forhold mellem en gruppe af produktionsfaktorer uden hensyntagen til faktorerne udenfor denne gruppe.

Separabilitet beskrives normalt direkte som egenskaber ved produktionsfunktionen; men kan også udtrykkes vha. Allen-substitutionselasticiteter.

Svag separabilitet kan udtrykkes på følgende måde:

For en opdeling af produktionsfaktorerne i et antal (s) disjunkte delmængder:

$$N = N^1 \cup N^2 \cup \ldots \cup N^s$$

fås svag separabilitet, hvis

$$AES_{ik} = AES_{jk} \quad for \quad i,j \in N^p \quad og\ k \notin N^p$$ [7]

Udtrykt på denne måde er separabilitet ret intuitivt. Hvis fx. 2 produktionsfaktorer har samme substitutionselasticitet mht. en tredje faktor, betyder det jo, at anvendelsen af de to faktorer stiger procentuelt lige meget ved en stigning i den tredje faktors pris. Dvs. at forholdet mellem de to faktorer er uændret; det marginale substitutionsforhold er uændret, og det er jo netop betingelsen for separabilitet. Formelt har vi:

[7] Streng defineres tilsvarende som

$$AES_{ik} = AES_{jk} \quad for \quad i \in N^p, j \in N^r, N^p \neq N^r \ og\ k \notin N^p \cup N^r$$

$$AES_{ik} = AES_{jk}$$

$$\Rightarrow \frac{1}{s_k}\frac{\partial \log x_i}{\partial \log p_k} = \frac{1}{s_k}\frac{\partial \log x_j}{\partial \log p_k}$$

$$\Rightarrow \frac{\partial \log\left(\frac{x_i}{x_j}\right)}{\partial \log p_k}$$

Separabiliteten kan udtrykkes både ved parametre i omkostningsfunktionen og i produktionsfunktionen. Udtrykt ved parametre i produktionsfunktionen fås:

$$AES_{ik} = AES_{jk}$$

$$\Rightarrow \frac{f_i f_k}{f f_{ik}} = \frac{f_j f_k}{f f_{jk}}$$

$$\Rightarrow \frac{f_i}{f_{ik}} = \frac{f_j}{f_{jk}}$$

$$\Rightarrow \frac{\partial\left(\frac{f_i}{f_j}\right)}{\partial x_k}$$

dvs. det marginale substitutionsforhold mellem i og j er uændret ved en ændring i indsatsen af faktor k.

Udtrykt ved omkostningsfunktionens parametre fås:

$$AES_{ik} = AES_{jk}$$

$$\Rightarrow \frac{C C_{ik}}{C_i C_k} = \frac{C C_{jk}}{C_j C_k}$$

$$\Rightarrow \frac{C_{ik}}{C_i} = \frac{C_{jk}}{C_j}$$

$$\Rightarrow \frac{\partial\left(\frac{C_i}{C_j}\right)}{\partial p_k}$$

I en TL-omkostningsfunktion fås:

$$AES_{ik} = AES_{jk}$$

$$\Rightarrow \frac{b_{ik} + s_i s_k}{s_i s_k} = \frac{b_{jk} + s_j s_k}{s_j s_k}$$

og i rækkeudviklingspunktet fås:

$$\frac{b_{ik} + a_i a_k}{a_i a_k} = \frac{b_{jk} + a_j a_k}{a_j a_k}$$

$$\Rightarrow a_j[b_{ik} + a_i a_k] = a_i[b_{jk} + a_j a_k]$$

$$\Rightarrow a_j b_{ik} = a_i b_{jk}$$

Man kan let få en indikation af visse typer af separabilitet ved at betragte matricen af Allen-elasticiteter. Hvis en række /søjle har stort set ens substitutionselasticiteter, tyder det på, at produktionsteknologien er seperabel i den pågældende faktor og samtlige øvrige faktorer. Formelt kan vi altså pålægge separabilitet af en faktor k overfor alle øvrige faktorer ved at pålægge restriktionen:

$$b_{ik} = b_{jk}\frac{a_i}{a_j} \quad \textit{for alle } i,j \neq k$$

5.3. Translog som lokal approksimation til en CES-teknologi.

Som tidligere vist har vi flg. Allen-substitutionselasticiteter i en TL-omkostningsfunktion:

$$AES_{ij} = \frac{b_{ij} + s_{i,t}s_{j,t}}{s_{i,t}s_{j,t}} \qquad \forall\ i \neq j$$

$$AES_{i,i} = \frac{b_{ii} + s_{i,t}(s_{i,t}-1)}{s_{i,t}^2} \qquad \forall\ i$$

som i udviklingspunktet for den 2.-ordens logaritmiske taylorapproximation, som TL-funktionen er udtryk for, bliver:

$$AES_{ij} = \frac{b_{ij} + a_i a_j}{a_i a_j} \qquad \forall\ i \neq j$$

$$AES_{i,i} = \frac{b_{ii} + a_i(a_i-1)}{a_i^2} \qquad \forall\ i$$

hvis TL-funktionen skal approximere en CES-teknologi, skal der pålægges den restriktion, at disse substitutionselasticiteter er parvis ens, dvs. ens for forskellige i,j, og egenelasticiteterne skal også alle være ens.

Med en CES-omkostningsfunktion af formen:

$$C(y,p) = y^{\frac{1}{h}} \left[\sum_i a_i^{\sigma} p_i^{(1-\sigma)} \right]^{\frac{1}{1-\sigma}}$$

angiver σ substitutionselasticiteten mellem to vilkårlige forskellige faktorer, mens egenelasticiteten let kan vises at være:

$$AES_{ii} = \sigma(1-\frac{1}{s_i}) = \sigma(1-\frac{1}{a_i})$$

Der gælder derfor følgende restriktioner på TL-funktionens parametre:

$$\frac{b_{ij} + a_i a_j}{a_i a_j} = \sigma \quad \Rightarrow \quad b_{ij} = -(1-\sigma)a_i a_j$$

$$\frac{b_{ii} + a_i(a_i-1)}{a_i^2} = \sigma(1-\frac{1}{a_i}) \quad \Rightarrow \quad b_{ii} = (1-\sigma)(a_i-1)a_i$$

Bemærk specielt, at $b_{ij} = 0$ medfører, at $AES_{ij} = 1$, uanset værdien af øvrige forklarende variabler. Dette er blot en anden måde at se CD-funktionen som et specialtilfælde på.

Litteratur:

Allen, R. G. D., 1958. *Mathematical Analysis for Economists*, MacMillan & Co Ltd. London.

Christensen, L. R., D. W. Jorgenson and L. J. Lau, 1971. Transcendental Logarithmic Production Frontiers. *Review of Economics and Statistics*, p. 28-45.

Diewert, W. E., 1971. An Application of the Shepherd Duality Theorem: A Generaliced Leontief Production Function. *Journal of Political Economy*, p. 481-507.

Despotakis, K. A.,1986. Economic Performance of Flexible Functional Forms. *European Economic Review*, p. 1107-1143.

Fuss, M. and D. McFadden (eds), 1978. *Production Economics: A Dual Ap proach to Theory and Applications*. North Holland, Amsterdam.

Lau, J. L., 1978. Testing and Imposing Monotonicity, Convexity and Quasi Convexity Constraints. In Fuss and McFadden (1978).

Lau, J. L., 1986. Functional Forms in Econometric Model Building. Kap. 26 i Griliches and Intriligator (1986).

Lesuis, P. J. J., 1991. *Production Functions for the Dutch Economy - A Sectoral Approach*. Eburon Delft, Delft.

McFadden, D., 1963. Constant Elasticity of Substitution Production Functions. *Review of Economic Studies*, p. 73-83.

McFadden, D., 1978. Cost, Revenue, and Profit Functions. Chapter 1 in Fuss and McFadden (1978).

Mundlak, Y., 1968. Elasticities of Substitution and the Theory of Derived Demand. *Review of Economic Studies*, p. 225-235.

Otto, L., 1985. *En analyse af produktionsmulighederne i fremstillingserhverv*. Licentiatafhandling ved Økonomisk Institut, Københavns Universitet.

Uzawa, H, 1962. Production functions with Constant Elasticities of Substitution. *Review of Economic Studies*, p. 291-299.

Appendiks 1. Udledning af sumrestriktioner på *LDL'*-matricen.

Vi har i vores tilfælde med 5 produktionsfaktorer,
***LDL'* =**

$$
\begin{pmatrix}
d_1 & d_1\lambda_{21} & d_1\lambda_{31} & d_1\lambda_{41} & d_1\lambda_{51} \\
d_1\lambda_{21} & d_1\lambda_{21}^2+d_2 & d_1\lambda_{21}\lambda_{31}+d_2\lambda_{32} & d_1\lambda_{21}\lambda_{41}+d_2\lambda_{42} & d_1\lambda_{21}\lambda_{51}+d_2\lambda_{52} \\
d_1\lambda_{31} & d_1\lambda_{21}\lambda_{31}+d_2\lambda_{32} & d_1\lambda_{31}^2+d_2\lambda_{32}^2+d_3 & d_1\lambda_{31}\lambda_{41}+d_2\lambda_{32}\lambda_{42}+d_3\lambda_{43} & d_1\lambda_{31}\lambda_{51}+d_2\lambda_{32}\lambda_{52}+d_3\lambda_{53} \\
d_1\lambda_{41} & d_1\lambda_{21}\lambda_{41}+d_2\lambda_{42} & d_1\lambda_{31}\lambda_{41}+d_2\lambda_{32}\lambda_{42}+d_3\lambda_{43} & d_1\lambda_{41}^2+d_2\lambda_{42}^2+d_3\lambda_{43}^2+d_4 & d_1\lambda_{41}\lambda_{51}+d_2\lambda_{42}\lambda_{52}+d_3\lambda_{43}\lambda_{53}+d_4\lambda_{54} \\
d_1\lambda_{51} & d_2\lambda_{21}\lambda_{51}+d_2\lambda_{52} & d_1\lambda_{31}\lambda_{51}+d_2\lambda_{32}\lambda_{52}+d_3\lambda_{53} & d_1\lambda_{41}\lambda_{51}+d_2\lambda_{42}\lambda_{52}+d_3\lambda_{43}\lambda_{53}+d_4\lambda_{54} & d_1\lambda_{51}^2+d_2\lambda_{52}^2+d_3\lambda_{53}^2+d_4\lambda_{54}^2+d_5
\end{pmatrix}
$$

de 5 sumrestriktioner bliver, idet $\lambda_{ii} = 1 \ og \ \lambda_{ij} = 0 \quad for \ j>i$:

(a)

$$d_1\sum_i \lambda_{i1} = 0 \quad \Rightarrow$$

$$\sum_i \lambda_{i1} = 0 \ \vee \ d_1 = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \sum_{i=2}^{5} \lambda_{i1} = -1 \ \vee \ d_1 = 0$$

(b) givet (a)

$$d_1\sum_i \lambda_{i1} + d_2\sum_i \lambda_{i2} = 0 \quad \Rightarrow$$

$$\sum_i \lambda_{i2} = 0 \ \vee \ d_2 = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \sum_{i=3}^{5} \lambda_{i2} = -1 \ \vee \ d_2 = 0$$

(c) givet (a) og (b)

$$d_1\sum_i \lambda_{i1} + d_2\sum_i \lambda_{i2} + d_3\sum_i \lambda_{i3} = 0 \quad \Rightarrow$$

$$\sum_i \lambda_{i3} = 0 \ \vee \ d_3 = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \sum_{i=4}^{5} \lambda_{i3} = -1 \ \vee \ d_3 = 0$$

(d) givet (a), (b) og (c)

$$d_1\sum_i \lambda_{i1} + d_2\sum_i \lambda_{i2} + d_3\sum_i \lambda_{i3} + d_4\sum_i \lambda_{i4} = 0 \quad \Rightarrow$$

$$\sum_i \lambda_{i4} = 0 \ \vee \ d_4 = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \lambda_{54} = -1 \ \vee \ d_4 = 0$$

(e) givet (a), (b), (c) og (d)

$$d_1\sum_i \lambda_{i1} + d_2\sum_i \lambda_{i2} + d_3\sum_i \lambda_{i3} + d_4\sum_i \lambda_{i4} + d_5\sum_i \lambda_{i5} = 0 \quad \rightarrow$$
$$d_5 = 0$$

Sammenfattende har vi altså for vilkårligt n:

$$\sum_i \lambda_{ij} = 0 \ \vee \ d_j = 0 \ \ for\ j=1,\ldots,n-1 \ \ \wedge \ d_n = 0$$

Sumrestriktionen betyder, at vi under visse forudsætninger kan nøjes med at estimere n-1 ligninger og derefter residualberegne parametrene i den n'te. Skrevet med matrix-notation kan faktorandelsfunktionerne skrives som:

$$s_t = a + \left[LDL' - aa' + \hat{A}\right]\ln p_t + b_y \ln y + b_t t + \epsilon_t$$

Da koefficientmatricen til $\ln p_t$ er symetrisk må vi eksplicit pålægge rækkerne samme restriktioner som søjlerne implicit pålægges ved udeladelse af den n'te relation. Lesuis(1991) postulerer, at sumrestriktionen kræver:

$$\sum_i \lambda_{ij} = 0 \quad for\ j=1,\ldots,n$$

Af det foregående fremgår det, at dette er tilstrækkeligt; men ikke nødvendigt. Følger vi Lesuis på dette punkt får vi i tilfældet med 5 produktionsfaktorer følgende relevante rækker i *LDL'*-matricen:

$$\begin{pmatrix}
d_1 & d_1\lambda_{21} & d_1\lambda_{31} & d_1\lambda_{41} & -d_1(1+\lambda_{21}+\lambda_{31}+\lambda_{41}) \\
d_1\lambda_{21} & d_1\lambda_{21}^2+d_2 & d_1\lambda_{21}\lambda_{31}+d_2\lambda_{32} & d_1\lambda_{21}\lambda_{41}+d_2\lambda_{42} & -d_1\lambda_{21}(1+\lambda_{31}+\lambda_{41}+\lambda_{51})-d_2(1+\lambda_{32}+\lambda_{42}) \\
d_1\lambda_{31} & d_1\lambda_{21}\lambda_{31}+d_2\lambda_{32} & d_1\lambda_{31}^2+d_2\lambda_{32}^2+d_3 & d_1\lambda_{31}\lambda_{41}+d_2\lambda_{32}\lambda_{42}+d_3\lambda_{43} & -d_1\lambda_{31}(1+\lambda_{21}+\lambda_{31}+\lambda_{41})-d_2\lambda_{32}(1+\lambda_{32}\lambda_{42})-d_3(1+\lambda_{43}) \\
d_1\lambda_{41} & d_1\lambda_{21}\lambda_{41}+d_2\lambda_{42} & d_1\lambda_{31}\lambda_{41}+d_2\lambda_{32}\lambda_{42}+d_3\lambda_{43} & d_1\lambda_{41}^2+d_2\lambda_{42}^2+d_3\lambda_{43}^2+d_4 & -d_1\lambda_{41}(1+\lambda_{21}+\lambda_{31}+\lambda_{51})-d_2\lambda_{42}(1+\lambda_{32}+\lambda_{42})-d_3\lambda_{43}(1+\lambda_{43})-d_4
\end{pmatrix}$$

Appendiks 2. Operationalicering af Allen substitutionselasticiteten.

Det kan være hensigtsmæssigt at udtrykke Allen elasticiteten vha parametre enten fra produktionsfunktionen eller dualt fra omkostningsfunktionen. Sidstnævnte vil blive anvendt i det følgende samt i de empiriske analyser.

Givet produktionsfunktionen:

$$y = f(x_1,\dots,x_n) \tag{18}$$

fås som velkendt ved omkostningsminimering:

$$f_i(x_1,\dots,x_n) = \lambda p_i \quad i = 1,\dots,n \tag{19}$$

totaldifferentiation af (18) og (19) giver:

$$\begin{aligned} dy &= \sum_{i=1}^{n} f_i dx_i \\ \lambda dp_i + p_i d\lambda &= \sum_{j=1}^{n} f_{ij} dx_j \quad i = 1,\dots,n \end{aligned} \tag{20}$$

som ved at anvende (19) i (20) kan skrives på matrixform som:

$$\lambda \begin{pmatrix} \frac{1}{\lambda}dy \\ dp_1 \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ dp_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & f_1 & \cdot & \cdot & \cdot & f_n \\ f_1 & f_{11} & \cdot & \cdot & \cdot & f_1n \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ f_n & f_{n1} & \cdot & \cdot & \cdot & f_{nn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -\frac{1}{\lambda}d\lambda \\ dx_i \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ dx_n \end{pmatrix} = H \begin{pmatrix} -\frac{1}{\lambda}d\lambda \\ dx_1 \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ dx_n \end{pmatrix} \tag{21}$$

hvor H er den indrammede hessematrice (bordered hessian).

(21) kan løses mht. dx og $d\lambda$, forudsat H har fuld rang:

$$\begin{pmatrix} -\frac{1}{\lambda}d\lambda \\ dx_i \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ dx_n \end{pmatrix} = \lambda H^{-1} \begin{pmatrix} \frac{1}{\lambda}dy \\ dp_1 \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ dp_n \end{pmatrix} = \lambda \begin{pmatrix} K_{00} & : & K_{0j} \\ .. & . & .. \\ K_{j0} & : & K_{jj} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{1}{\lambda} \\ dp_1 \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ dp_n \end{pmatrix}$$

hvor matricen

$$K = \begin{pmatrix} K_{00} & : & K_{0j} \\ .. & . & .. \\ K_{j0} & : & K_{jj} \end{pmatrix}$$

er en opsplitning af H^1 svarende til de to vektorer. Vi får hermed:

$$dx_i = \lambda K_{i0}\frac{1}{\lambda}K_{i0}dy + \lambda\sum_j k_{ij}dp_j \quad \wedge \; dy = 0$$
$$\Rightarrow dx_i = \lambda\sum_j K_{ij}dp_j$$
$$\Rightarrow \left.\frac{dx_i}{dp_j}\right|_{dy=0} = \lambda k_{ij}$$

I det følgende underforstås, at vi arbejder på isokvanterne.

K_{ij} er det (i,j)'te element i $H^{-1} = \dfrac{AdjH}{|H|}$, dvs $K_{ij} = \dfrac{H^{ji}}{|H|} = \dfrac{H^{ij}}{|H|}$, hvor H^{ji} er cofaktoren til H_{ij} (det (i,j)'te element i H) og 2. lighedstegn følger af at H og dermed også H^1 er symmetrisk. Vi har altså fra (22), at

$$\frac{d\log x_i}{d\log p_j} = \frac{dx_i}{dp_j}\frac{p_j}{x_i} = \lambda\frac{p_j}{x_i}\frac{H^{ij}}{|H|} = \lambda\frac{p_jx_j}{x_ix_j}\frac{\sum f_ix_i}{\sum f_ix_i}\frac{H^{ij}}{|H|} \tag{23}$$
$$= \frac{\sum f_ix_i}{x_ix_j}\frac{p_jx_j}{\sum p_ix_i}\frac{H^{ij}}{|H|} = s_j\frac{\sum f_ix_i}{x_ix_j}\frac{H^{ij}}{|H|}$$

(23) svarer præcis til den oprindelige definition hos Allen[8], hvor substitutionselasticiteten (AES) defineres som:

$$AES_{ij} = \frac{d\log x_i}{d\log p_j}\frac{1}{s_j} = \frac{\sum f_i x_i}{x_i x_j}\frac{H^{ij}}{|H|} \tag{24}$$

Det ses, at denne (Allen partielle) substitutionselasticitet er symmetrisk da H er det - i modsætning til det måske umiddelbart mere naturlige begreb $\frac{d\log x_i}{d\log p_j}$.

Ud fra (23) eller (24) kan det vises, at under forudsætning af konstant skalaafkast er

$$AES_{ij} = \frac{f_i f_j}{f f_{ij}}$$

Det ses let i tilfældet med 2 faktorer:

$$\begin{aligned} H^{12} &= -f_1 f_2 \\ |H| &= -\left[f_{22}f_1^2 + f_{11}f_2^2 - 2f_1 f_2 f_{12}\right] \end{aligned}$$

Konstant skalaafkast, homogenitet af 1. grad i samtlige produktionsfaktorer, betyder at 1.-ordens afledte er homogene af 0. grad. Vi har derfor:

$$\begin{aligned} f_1 x_1 + f_2 x_2 &= f \\ f_{11} x_1 + f_{12} x_2 &= 0 \\ f_{21} x_1 + f_{22} x_2 &= 0 \end{aligned} \tag{25}$$

som giver:

$$|H| = -\frac{f_{12}}{x_1 x_2}(f_1 x_1 + f_2 x_2)^2$$

og indsat i (24) fås:

[8]Se Allen (1956) side 508.

$$AES_{12} = \frac{(f_1x_1 + f_2x_2)}{x_1x_2}\,\frac{f_1f_2x_1x_2}{f_{12}(f_1x_1 + f_2x_2)^2} = \frac{f_1f_2}{ff_{12}} \tag{26}$$

(26) er sammenlignet med (24) meget let at anvende i praksis. Den kan også udledes direkte ud fra 1. ordens betingelserne for omkostningsminimum, og det kan let vises, dels at Allen elasticiteten er lig Hicks elasticiteten i 2-faktortilfældet, sådan som det er påstået ovenfor, samt at et (dualt) resultat, svarende til (26) gælder for omkostningsfunktionens parametre.

Omkostningsminimering implicerer som velkendt, at

$$\log\left(\frac{f_1}{f_2}\right) = \log\left(\frac{p_1}{p_2}\right)$$

Vi kan ved antagelsen om konstant skalaafkast og de deraf følgende betingelser (25) skrive:

$$\begin{aligned}
d\log\left(\frac{p_1}{p_2}\right) &= d(\log f_1 - \log f_2) = \frac{1}{f_1}df_1 - \frac{1}{f_2}df_2 \\
&= \left(\frac{f_{11}}{f_1} - \frac{f_{21}}{f_2}\right)dx_1 + \left(\frac{f_{12}}{f_1} + \frac{f_{22}}{f_2}\right)dx_2 \\
&= \left(-\frac{x_2}{x_1}\frac{f_{12}}{f_1} - \frac{f_{21}}{f_2}\right)dx_1 + \left(\frac{f_{12}}{f_1} + \frac{x_1}{x_2}\frac{f_{12}}{f_2}\right)dx_2 \\
&= \left(-\frac{f_{12}x_2}{f_1} - \frac{f_{21}x_1}{f_2}\right)\frac{dx_1}{x_1} + \left(\frac{f_{12}x_2}{f_1} + \frac{f_{12}x_1}{f_2}\right)\frac{dx_2}{x_2} \\
&= -\frac{f_{12}}{f_1f_2}(f_1x_1 + f_2x_2)d\log x_1 + \frac{f_{12}}{f_1f_2}(f_1x_1 + f_2x_2)d\log x_2 \\
&= -\frac{ff_{12}}{f_1f_2}d\log\left(\frac{x_1}{x_2}\right)
\end{aligned} \tag{27}$$

$$\Leftrightarrow \frac{\partial\log\left(\frac{x_1}{x_2}\right)}{\partial\log\left(\frac{p_2}{p_1}\right)} = \frac{f_1f_2}{ff_{12}}$$

Dette er Hicks substitutionselasticiteten; men det kan let ses at være det samme som Allen substitutionselasticiteten i dette tilfælde. Vi har jo på isokvanten, at

$$dx_2 = -\frac{f_1}{f_2}dx_1 \Leftrightarrow x_2 d\log x_2 = -\frac{f_1}{f_2}x_1 d\log x_1$$
$$\Leftrightarrow d\log x_2 = -\frac{p_1x_1}{p_2x_2}d\log x_2$$
$$\Leftrightarrow d\log x_1 - d\log x_2 = \left(1 + \frac{p_1x_1}{p_2x_2}\right)d\log x_1 = \frac{1}{s_2}d\log x_1$$

hvor 2. biimplikationstegn forudsætter, at vi er i omkostningsminimum. Indsættes dette i (27), og sættes $d\log p_1 = 0$ fås Allen elasticiteten:

$$\frac{\partial \log x_1}{\partial \log p_2}\frac{1}{s_2} = \frac{f_1 f_2}{f f_{12}} \tag{28}$$

Allen (eller Hicks) elasticiteten kan også udtrykkes vha. omkostningsfunktionens parametre. Fra Shepheards lemma har vi:

$$x_1 = \frac{\partial C}{\partial p_1} = c_1$$
$$x_2 = \frac{\partial C}{\partial p_2} = c_2$$

dvs. vi har helt tilsvarende som ved udledningen af (27), at

$$d\log\left(\frac{x_1}{x_2}\right) = d\log\left(\frac{c_1}{c_2}\right) = \left(\frac{c_{11}}{c_1} - \frac{c_{12}}{c_2}\right)dp_1 + \left(\frac{c_{12}}{c_1} - \frac{c_{22}}{c_2}\right)dp_2$$

Ved udnyttelse af, at omkostningsfunktionen er homogen af 1. grad i samtlige faktorpriser, og faktorefterspørgselsfunktionerne dermed homogene af 0. grad:

$$c_1p_1 + c_2p_2 = C$$
$$c_{11}p_1 + c_{12}p_2 = 0$$
$$c_{21}p_1 + c_{22}p_2 = 0$$

fås på helt tilsvarende vis som ved udledningen af (27):

$$\frac{\partial \log\left(\frac{x_1}{x_2}\right)}{\partial \log\left(\frac{p_2}{p_1}\right)} = \frac{\partial \log x_1}{\partial \log p_2}\frac{1}{s_2} = \frac{CC_{12}}{C_1C_2}$$