Danmarks Statistik
MODELGRUPPEN

Arbejdspapir*

Thomas Thomsen

11. september 2007

Nytteeffektiviteter og ikke-homotetiske forbrugssystemer

Resumé:

[Tanken med papiret var, at det også skulle indeholde en praktisk del, hvor det vises hvordan man estimerer med nytteeffektiviteter i TSP, og hvad det betyder i forhold til at "snyde" vha. kædeindeks o.lign. Denne praktiske del udestår pga. tidspres til en anden god gang, men jeg synes det er rart (også for GRH's DLU-arbejde) at få teoridelen på bordet nu.]

Ikke-homotetiske forbrugssystemer laves for det meste vha. såkaldte fleksible funktionsformer, som for eksempel AIDS-systemet (Almost Ideal Demand System). Ulempen ved dette er, at der ikke er garanteret konsistens for alle kombinationer af indkomst, priser og trends. Med andre ord kan man i en (lang) fremskrivning risikere, at systemet f.eks. kommer ud med et negativt tal for en af forbrugskomponenterne eller andre ubehageligheder.

I AGL-modeller og andre steder, hvor konsistensen er vigtig, bruges ofte nestet CES som forbrugssystem. Dette indebærer imidlertid, at der implicit antages homotecitet (fravær af indkomsteffekter). Dette papir viser, hvorledes man i en hvilken som helst nytte- eller omkostningsfunktion kan indbygge indkomsteffekter på konsistent vis, ved at operere med det nye begreb nytteeffektiviteter (som er effektivitetsindeks, som afhænger af nytteniveauet).

Nøgleord: Forbrugssystemer, fleksible funktionsformer, homotecitet, indkomsteffekter, nestet CES

1. Indledning

Både i ADAM og EMMA kunne der måske være brug for at tænke lidt over, hvordan man formulerer et hensigtsmæssigt forbrugssystem, som er så konsistent som muligt (så man f.eks. ikke risikerer negative efterspørgsler, elasticiteter med forkert fortegn og den slags), og så let som muligt at estimere.

I ADAM kunne et sådant system være en erstatning for (eller rettere: tilpasning af) den nuværende CES mellem boligforbrug og andet forbrug, og måske endda også på lidt længere sigt for selve DLU. Desuden kunne man muligvis også på længere sigt indtænke fritid som et ekstra gode i et mere avanceret ADAM-forbrugssystem og på den måde få et (mere i hvert fald) konsistent udtryk for samfundets samlede nytte/velfærd/ækvivalerende variation i et givet år. Bilforbruget i ADAM er måske også et sted, hvor en konsistent CES med indkomsteffekter kunne gøre nytte. I EMMA er elforbruget formuleret på den måde, at der først opsplittes i elydelser og andet forbrug, og siden opsplittes elydelserne i apparater og elforbrug. Formuleringen er her vha. nestet CES uden indkomsteffekter, hvilket nok er en lidt hård restriktion som godt kunne trænge til opblødning eller i hvert fald aftestning.

Det er umiddelbart lidt vanskeligt at udbygge CES-funktionen med indkomsteffekter, da CES-funktionen som udgangspunkt er født homotetisk. I ADAMs boligefterspørgsel er der f.eks. indlagt en indkomsteffekt (som funktion af *Cp4xh1/pcp4xhv1*), som jeg ikke umiddelbart tør dømme konsistensen af (bortset fra – som det også står at læse i det bagvedliggende modelgruppepapir – at effekten nok rigtigere burde være en funktion af det *samlede* reale forbrug som proxy for den samlede nytte).

I det følgende vises det, hvordan det vha. såkaldte nytteeffektiviter er muligt at introducere konsistente indkomsteffekter, også i CES-funktionen.[1]

2. Teoretisk om forbrugssystemer

Før der åbnes for en diskussion af nytteeffektiviteter, vil det nok lønne sig først at se på, hvordan man traditionelt har estimeret forbrugssystemer. For de læsere, som er mest fortolige med faktorefterspørgselssystemer, henvises til boksen til højre, hvor der vises hvordan de forskellige begreber korresponderer i de to typer systemer. Mht. produktionsfunktioner er det i hvert fald den angivne nomenklatur for produktion, omkostninger og faktorefterspørgsel,

Variabelnavne i nytte- hhv. produktionsteori

Nyttefunktion		Produktionsfunktion	
Nytte:	U	Produktion:	Y
Budget:	M	Omkostninger:	C
Forbrug:	C_i	Faktoreftsp.:	X_i

[1] Som nævnt på forsiden var det håbet også at vise konkrete estimationer i denne omgang, men jeg har desværre ikke kunnet nå at få disse resultater med.

som er anvendt i papirerne TTH 15.01.06 om effektivitetsindeks og TTH 16.03.06 om Törnqvistindeks. Det er valgt at bruge M som navn for forbrugerens budget, da brug af C – som man typisk gør vedr. faktorefterspørgsel – nok ville associere for meget til et mængdeaggregat af C_i. I begge typer systemer kaldes priserne P_i, og det aggregerede prisindeks kaldes typisk P_{12} (hvis der kun er to varer/faktorer), eller blot P.

Lad os betragte denne nyttefunktion::

$$U = \mathrm{U}(C_1, \dots , C_n, \ t) \qquad (1)$$

At tiden indgår tages som udtryk for, at præferencerne skifter over tid. Som det vil være de fleste økonomer bekendt, er selve *niveauet* for U ikke interessant eller målbart for den sags skyld, da et ændret niveau blot kan fortolkes som, at indifferenskurverne omnummereres.[2] For at finde efterspørgslerne, maksimeres nytten U givet budgettet $M = P_1\ C_1 + \dots + P_n\ C_n$, hvorved der fås:

$$C_i = \mathrm{C_i}^{\#}(M, P_1, \dots , P_n, t) \qquad (2)$$

Her indikerer #-tegnet, at der er tale om såkaldte ikke-kompenserede efterspørgsler (Marshall-efterspørgsler), hvor budgettet M indgår.[3] Dette til forskel fra de kompenserede efterspørgsler (Hicks-efterspørgsler), som afhænger af nytten U:

$$C_i = \mathrm{C_i}(U, P_1, \dots , P_n, t) \qquad (3)$$

Disse kan fås ud fra (1), hvis man for givet U minimerer omkostningerne $P_1C_1 + \dots + P_nC_n$, svarende til hvordan faktorefterspørgsler udledes fra en produktionsfunktion.[4]

I stedet for at bruge en nyttefunktion, vil man dog ofte postulere enten en omkostningsfunktion eller en indirekte nyttefunktion. Begge disse opsamler al informationen i nyttefunktionen, som derved bliver overflødig. Omkostningsfunktionen er helt som den kendes fra faktorefterspørgselssystemer:

$$M = \mathrm{M}(U, P_1, \dots P_n, t) \qquad (4)$$

Altså afhænger omkostningerne/budgettet af nytten, priserne og tiden, og funktionen skal bl.a. være homogen af 1. grad i priserne.[5] Ud fra denne kan Hicks-efterspørgslerne (3) findes vha. Shephard's Lemma, hvor omkostningsfunktionen differentieres mht. priserne: $C_i() = \partial M()/\partial P_i$.

[2] Man får således samme efterspørgsler, hvis nytten er givet som $U = \mathrm{F}(\mathrm{U}(C_1, C_2, t))$, hvor det eneste krav til F() er, at den er en monotont voksende funktion. Et eksempel kunne være $\mathrm{F}(x) = x^2$. Her omnummereres indifferenskurverne, så den gamle nummer 2 nu er nummer 4, nummer 3 er nummre 9 osv., hvilket er ligegyldig for efterspørgslen.

[3] I faktorefterspørgselssammenhæng ville det svare til, at producenten for givne omkostninger skal maksimere sin produktion, dvs. funktioner af formen $X_i = \mathrm{X_i}^{\#}(C, P_1, \dots , P_n, t)$.

[4] Hvor ligningerne er af formen $X_i = \mathrm{X_i}(Y, P_1, \dots , P_n, t)$.

[5] I faktorefterspørgselssammenhæng ville det svare til $C = \mathrm{C}(Y, P_1, \dots P_n, t)$.

Alternativt kan der postuleres en indirekte nyttefunktion:

$$U = \mathrm{U}^{\#}(M, P_1, \dots P_n, t) \tag{5}$$

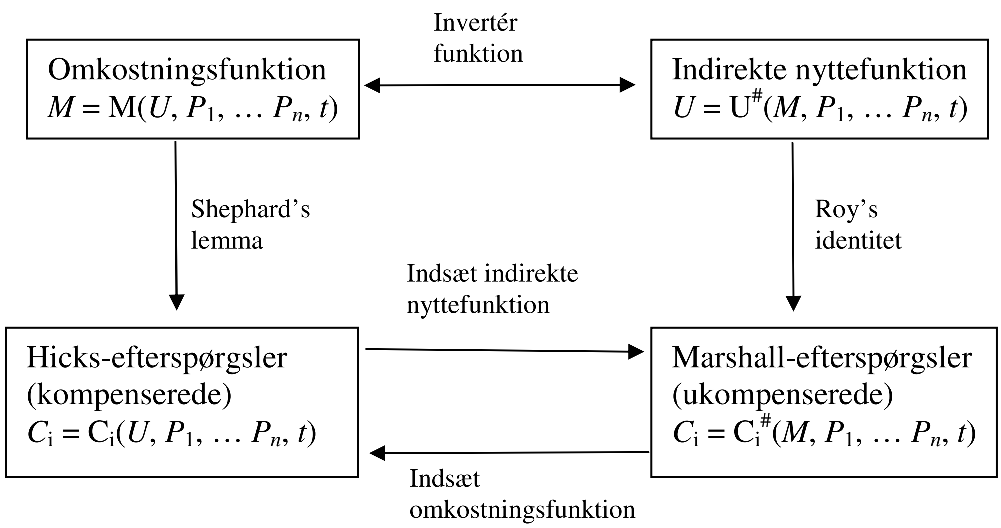
hvor #-tegnet er for at kunne distingvere den fra (1). Her indgår forbrugskomponenterne ikke direkte i nytten, men i stedet budget og priser (og trend).[6] Funktionen skal bl.a. være homogen af nulte grad i budget og priser. Fra den indirekte nyttefunktion kan man komme til Marshall-efterspørgslerne vha. differentiation. Det er den såkaldte Roy's identitet:
$C_i^{\#}() = -(\partial U^{\#}()/\partial P_i)/(\partial U^{\#}()/\partial M)$.

Til sidst skal det nævnes, at man kan komme fra omkostningsfunktionen til den indirekte nyttefunktion (og tilbage) ved at invertere (løse (4) for U hhv. løse (5) for M). Problemet i dette er, at det for det meste ikke kan gøres analytisk, når der er indkomsteffekter.

Mellem Hicks- og Marshall-efterspørgslerne gælder er der også en forholdsvis nem overgang. Indsættes den indirekte nyttefunktion i Hicks-efterspørgslerne, fås Marshall-efterspørgslerne. Og indsættes omkostningsfunktionen i Marshall-efterspørgslerne, fås Hicks-efterspørgslerne

Det kan måske være lidt forvirrende at overskue det med alle disse varianter, så derfor det følgende diagram:

Figur 1. Oversigt over de forskellige funktionsformer i forbrugsteori



Udover disse funktionsformer er der selvfølgelig også den bagvedliggende direkte nyttefunktion, $U = \mathrm{U}(C_1, \dots C_n, t)$. Denne tages der dog ikke så hyppigt udgangspunkt i, fordi dualitetsteorien siger, at alle den bagvedliggende nyttefunktions egenskaber er fuldt repræsenterede i enten en omkostningsfunktion eller en indirekte nyttefunktion.

[6] I faktorefterspørgselssammenhæng ville det svare til $Y = \mathrm{Y}^{\#}(C, P_1, \dots P_n, t)$. Denne form har jeg dog aldrig set anvendt i den sammenhæng.

Venstre halvdel af figur 1 er der skrevet rigtigt meget om i litteraturen om faktorefterspørgselssystemer, for når der estimeres produktionsfunktioner, bruges der Hicks-efterspørgsler, som fås nemt ved at differentiere en given omkostningsfunktion.[7]

Højre halvdel af figuren bruges hovedsageligt til forbrugssystemer, da man dér har brug for at estimere *Marshall*-efterspørgslerne og i første omgang er ligeglad med Hicks-efterspørgslerne (i hvert fald indtil nogen begyder at spørge til kompenserede substitutionselasticiteter). Marshall-efterspørgslerne fås nemt ved at differentiere en given indirekte nyttefunktion.

Overgangen fra den ene til den anden halvdel af figuren kræver, at man inverterer enten omkostningsfunktionen eller den indirekte nyttefunktion, og da dette ofte ikke kan lade sig gøre analytisk, vil der være en naturlig modvilje mod at bevæge sig hen over midten i figuren. Sagt med andre ord vil man ofte som forbrugssystem-estimatør foretrække at postulere en indirekte nyttefunktion og bruge Roy's identitet (som altid virker), fremfor at bruge en omkostningsfunktion, hvor man ikke på forhånd ved, om man kan invertere denne mht. U og dermed skrive sine (Marshall-) efterspørgselsligninger analytisk op. Det er jo nok derfor, at f.eks. translog-omkostningsfunktionen eller GL-omkostningsfunktionen ikke bruges i forbrugssystemer.[8]

3. Eksempler på forbrugssystemer: CES og AIDS

I de fleste forbrugssystermer opereres der med ikke-homotecitet, svarende til at når budgettet stiger med 1%, vil nogle komponenter stige mere end 1% ("luksusgoder"), og andre mindre ("nødvendighedsgoder"). Det er almindeligt anerkendt, at et homotetisk forbrugssystem er for restriktivt, da alle indkomstelasticiteter derved bliver 1 (svarende til lineære Engel-kurver gennem origo).

Det vil føre for langt her at gennemgå de mest populære typer af forbrugssystemer, og dette papirs idé er egentlig også, om man måske kan undgå at sætte sig alt for meget ind i disse, og i stedet drage fordel af den know-how, som allerede findes i rigt mål vedrørende produktionsfunktioner. Vi vil dog alligevel se på to af de mere kendte forbrugssystemer, nemlig CES og AIDS.

[7] Som har formen $X_i = C_i(Y, P_1, \dots P_n, t)$.

[8] Mht. translog-omkostningsfunktionen, kan denne rent faktisk godt inverteres for U. Men det indebærer, at man løser en andengradsligning i $\log(U)$ og vælger den største rod.

3.1 CES

CES-funktionen er født homotetisk, men én måde at indbygge ikke-homotecitet på er den såkaldte ”S-Branch” CES-nyttefunktion, baseret på en idé om minimumsforbrug. Det svarer til, at man i stedet for denne nyttefunktion:

$$U = \mathrm{CES}(C_1, C_2) \tag{6}$$

bruger denne:

$$U = \mathrm{CES}(C_1 - \mathrm{m}_1, C_2 - \mathrm{m}_2) \tag{7}$$

hvor m_1 og m_2 er estimerede parametre. Denne funktion er ikke længere homotetisk, og man kan forstå den på den måde, at origo for CES-indifferenskurverne flyttes vha. vektoren (m_1, m_2).

Der er dog nogle problemer med denne ellers tilforladelige idé. For det første er der ikke garanteret konsistens, hvis en eller flere af *m*'erne er < 0. I så fald kan man f.eks. risikere negative forbrugsefterspørgsler

For det andet og mindre oplagt er der i en vis forstand en parameter for meget i (7). For at et forbrugssystem er fleksibelt kræves det, at det i et givet punkt (år) kan indstille sig på en hvilket som helst størrelse af omkostningsandelene og disses førsteordens-afhængighed af priser og indkomst (og trend hvis en sådan er med). I (6) er der to parametre (σ og δ – konstanten κ er ligegyldig), hvilket er nok til at systemet kan ramme enhver given omkostningsandel for C_1, samt dennes elasticitet mht. den relative pris P_1/P_2. Fuld fleksibilitet kræver så endvidere, at omkostningsandelens afhængighed mht. budgettet M (dvs. indkomsteffekten) også kan indstille sig på enhver på forhånd given størrelse. Problemet er bare, at både m_1 og m_2 kan sikre dette. Tydeligst viser dette sig i tilfældet $\sigma = 0$, hvor m_1 og m_2 ikke engang kan identificeres hver for sig. Tag eksempelvis disse to funktioner:

$$U = \min(C_1 - 1, C_2) \tag{8}$$
$$U = \min(C_1, C_2 + 1)$$

I det første tilfælde er isokvanterne flyttet én enhed mod højre, og i det andet tilfælde én enhed nedad. Men der er jo kun tale om en omnummerering af U, idet $\min(C_1, C_2 + 1) = \min(C_1 - 1, C_2) + 1$. De to funktioner i (8) giver altså helt samme forbrugsefterspørgsel.

Når $\sigma \neq 0$ *kan* man identificere både m_1 og m_2, men spørgsmålet er, hvor stærk denne identifikation er? Det er nok det, som GRH har kaldt ”identificeret vha. funktionel form”, så hvis parametrene er meget korrelerede er det måske klogt at forsøge at undvære én af dem eller binde dem sammen. Og mht. fleksibilitet i Diewerts forstand er én af dem i hvert fald overflødige. Det kedelige er så bare, at det ikke generelt (for $\sigma \neq 0$) vil være ligegyldigt for de andre parametre (bl.a. σ) hvilken én af dem, man undværer.

3.2 AIDS

Interessant nok og mod forbrugssystems-sædvane er AIDS-forbrugssystemet rent faktisk udledt fra en omkostningsfunktion, som altså i dette tilfælde kan løses for *U*.[9]

$$\log(C) = a_0 + \sum_i a_i \log(P_i) \;+\; 0.5\sum_i \sum_j b_{ij} \log(P_i)\log(P_j) \qquad (9)$$
$$+U\, b_0 \prod_i P_i^{b_{ui}}$$

Systemet har følgende budgetandele:

$$s_i = a_i + \sum_j b_{ij} \log(P_j) + b_{ui} \log\left(\frac{M}{P}\right) \qquad (10)$$

hvor s_i er den i'te budgetandel. Så hvis indkomsten stiger med 1%, stiger den i'te budgetandel med b_{ui} procentpoints. Der skal gælde, at budgetandelene er uforandrede, når priser og budget stiger med 1%, så matricen af *b*'er skal summe til nul rækkevis og i øvrigt være symmetrisk. Der gælder desuden, at a_i'erne og b_{ui}'erne skal summe til nul.

P er et samlet prisindeks for de enkelte forbrugskomponenter, og da *P* definitorisk er lig *M*/*U* ses det, at der i virkeligheden står log(*U*) som indkomsteffekt. Den aggregerede pris, *P*, er givet som:

$$\log(P) = a_0 + \sum_i a_i \log(P_i) \;+\; 0.5\sum_i \sum_j b_{ij} \log(P_i)\log(P_j) \qquad (11)$$

Dette prisomdels ses at afhænge af parametre fra (10), samt den ekstra skalaparameter a_0 fra (9). Systemet i (10) er fuldt fleksibelt i Diewerts forstand (vi ser her bort fra trends), da omkostningsandelene kan indstille sig på et arbitrært niveau i et givet år (vha. a_i'erne) og kan have arbitrære substitutions- og indkomsteffekter (vha. b_{ij}'erne og b_{ui}'erne). Set i det lys er a_0 derfor overflødig i fleksibilitets-forstand og kunne sættes til 0 hvis man ønskede det. For selv uden a_0, kan AIDS fungere som en lokal førsteordens-approksimation til ethvert givet forbrugssystem. Så parameteren a_0 er endnu et eksempel på "identificeret vha. funktionel form", idet den godt kan estimeres, men ofte ret upræcist. Derfor anbefales det også tit, at man sætter den til en eller anden værdi på forhånd. Hvilken værdi er der ikke synderlig konsensus om.

Det samlede prisindeks har man ofte i stedet for at bruge (11) selv konstrueret, for at kunne estimere ligningerne på en simpel måde. F.eks. kan man med fordel bruge et Törnqvistkædeindeks, og historisk har det noget mere primitive Stone-indeks også været brugt (så kaldes systemet LA/AIDS, Linear Approximate).

---

[9] Deaton/Muellbauer (1980): *An Almost Ideal Demand System*. American Economic Review.

Fordelen ved AIDS er bl.a., at det er fuldt fleksibelt også mht. indkomsteffekter, og at det er nemt at estimere, specielt hvis man bruger et hjemmelavet prisindeks som proxy for *P*. Ulempen er bl.a., at man ikke kan være sikker på konsistensen, når et sådant system skrives langt frem. For der er intet, der sikrer, at budgetandelene i (10) ikke bliver mindre end 0 eller større end 1. Desuden er parameteren a_0 omgærdet af nogen mystik, for på den ene side anbefales det ikke at forsøge at estimere den, men på den anden side har Deaton/Muellbauer heller ikke haft lyst til at sætte den til f.eks. 0. De skriver selv:

> Since the parameter can be interpreted as the outlay required for a minimal standard of living when prices are unity (usually in the base year; (…)), choosing a plausible value is not difficult.

Her må det dog så indvendes, at den rette størrelse af a_0 har været diskuteret lige siden. Som det fremgår af (10), har denne translog-form. Erstatter man M/P med U, får man følgende:

$$s_i = a_i + \sum_j b_{ij} \log(P_j) + b_{ui} \log(U) \qquad (12)$$

som netop kendes fra translog-omkostningsfunktionen i faktorefterspørgsel (her hedder b_{ui} blot b_{yi}, og U hedder Y), når der tillades ikke-homotetiske (vridende) skalaeffekter.[10]

4. Analytisk løsning nødvendig?

Som det er fremgået ovenfor, er der en god grund til, at gængse omkostningsfunktioner som f.eks. translog eller GL ikke er blevet brugt i forbrugssystemer: nemlig at det kræver, at man løser/inverterer omkostningsfunktionen for *U*, og det er ikke sikkert, at man kan gøre det analytisk (det kan det dog mod sædvane for AIDS-omkostningsfunktionen). Og selv hvis man kan, risikerer man nogle lidt indviklede Marshall-efterspørgselsligninger.

På den anden side synes jeg, at det er lidt synd, at spørgsmålet om det med det analytiske skal have så stor betydning i en tidsalder, hvor computerkraften er blevet særdeles rigelig. Kan man ikke løse omkostningsfunktionen for *U*, kan sidstnævnte vel *simuleres* frem (eller approksimeres)? Fordelene ved dette er umiddelbare: ved at bruge omkostningsfunktioner fra faktorefterspørgslen, kan hele dette apparat genbruges (herunder viden om funktionsformernes eventuelle akilleshæle). Og dette gælder også faktorefterspørgselsteoriens trick med at indbygge trend- og skalaeffekter (svarende til indkomseffekter) vha. effektivitetsindeks, hvilket vi vil se nærmere på i det følgende afsnit.

[10] [Denne lighed undersøges nærmere i den endelige version af papiret.]

5. Brug af ”nytteeffektivitet”

Ved at bruge effektiviteter også i forbrugssystemer kan eventuelle trend- og indkomsteffekter indlægges på en relativt nem måde, mens hele det matematiske apparat og funktionsformerne osv. fra faktorefterspørgselsteorien kan genbruges.[11]

For at illustrere, tager vi udgangspunkt i et simpelt to-vare forbrugssystem (som vi antager er født homotetisk med homogenitetsgrad 1[12]):

$C_1 = \mathrm{C}_1(U, P_1, P_2)$ (13)
$C_2 = \mathrm{C}_2(U, P_1, P_2)$ (14)

Dette er såkaldte Hicks-efterspørgsler (kompenserede efterspørgsler), da de afhænger af nytten U og ikke af indkomsten. Da systemet har homogenitetsgrad 1, kan det skrives således:

$C_1 = \mathrm{U}\ \mathrm{c}_1(P_1, P_2)$ (15)
$C_2 = \mathrm{U}\ \mathrm{c}_2(P_1, P_2)$ (16)

Vi udbygger nu systemet med effektivitetsindeks (se f.eks. ADAM-bogen side 116):

$C_1 = 1/e_1\ U\ \mathrm{c}_1(P_1/e_1, P_2/e_2)$ (17)
$C_2 = 1/e_2\ U\ \mathrm{c}_2(P_1/e_1, P_2/e_2)$ (18)

Altså ganges hver forbrugskomponent med sit effektivitetsindeks, og hver pris divideres med sit effektivitetsindeks. (Hvis (17) ganges med e_1 på begge sider ses dette tydeligt). Vi definerer nu:

$\log(e_1) = \omega_1 \cdot \mathrm{t} + \psi_1 \cdot \log(U)$ (19)
$\log(e_2) = \omega_2 \cdot \mathrm{t} + \psi_2 \cdot \log(U)$ (20)

Så langt så godt, men vi kender jo ikke U. I stedet for den lidt uhåndgribelige U, kan man omformulere ved at bruge identiteten $U = M/P_{12}$, hvilket blot beskriver den måde prisindekset er defineret på. Altså kan man skrive:

$\log(e_1) = \omega_1 \cdot \mathrm{t} + \psi_1 \cdot \log(M/P_{12})$ (20)
$\log(e_2) = \omega_2 \cdot \mathrm{t} + \psi_2 \cdot \log(M/P_{12})$ (21)
$C_1 = 1/e_1\ M/P_{12}\ \mathrm{c}_1(P_1/e_1, P_2/e_2)$ (22)
$C_2 = 1/e_2\ M/P_{12}\ \mathrm{c}_2(P_1/e_1, P_2/e_2)$ (23)

Men hvor fås P_{12} så fra?

---

[11] Nytteeffektiviteternes pendant i faktorefterspørgselssystemer er at lade effektivitetsindeksene afhænge af både tiden og produktionen. Det sidste har ikke været dyrket i synderlig grad i ADAM-sammenhæng, da der ofte antages konstant skalaafkast. Men der er intet teoretisk til hinder for at lade produktions-effektivitetsindeksene afhænge af produktionsniveauet, lige som der ikke er noget teoretisk til hinder for at lade nytte-effektivitetsindeksene afhænge af nytteniveauet.

[12] Svarer til konstant skalaafkast for faktorefterspørgselssystemer.

5.1 Hvordan udregnes det "sande" aggregerede prisindeks?

Hvis man ikke vil "snyde" og bruge et hjemmelavet kædeindeks eller lignende, fås P_{12} fra omkostningsfunktionen. Omkostningsfunktionen er jo givet som følger (jf. evt. figur 1 i afsnit 2):[13]

$$M = \mathrm{M}(U, P_1/e_1, P_2/e_2) \tag{24}$$

Når der bruges nytteeffektiviteter i et efterspørgselssystem M(), tager man altid udgangspunkt i en omkostningsfunktion med homotecitetsgrad 1 (svarende til konstant skalaafkast i faktorefterspørgselssystemer) og uden trends. Det vil sige, at (24) kan skrives som følger:

$$M = U \;\; \mathrm{m}(P_1/e_1, P_2/e_2) \tag{25}$$

Hvis vi husker at $U = M/P_{12}$ og genopskriver effektivitetsindeksene og efterspørgselsligningerne for oversigtens skyld, kan man se, at følgende system fungerer som forbrugssystem:

$$P_{12} = \mathrm{m}(P_1/e_1, P_2/e_2) \tag{26}$$
$$\log(e_1) = \omega_1 \cdot \mathrm{t} \; + \; \psi_1 \cdot \log(M/P_{12}) \tag{27}$$
$$\log(e_2) = \omega_2 \cdot \mathrm{t} \; + \; \psi_2 \cdot \log(M/P_{12}) \tag{28}$$
$$C_1 = 1/e_1 \; M/P_{12} \; \mathrm{c}_1(P_1/e_1, P_2/e_2) \tag{29}$$
$$C_2 = 1/e_2 \; M/P_{12} \; \mathrm{c}_2(P_1/e_1, P_2/e_2) \tag{30}$$

I (26)-(28) bestemmes P_{12} simultant, og når den er givet følger e_1, e_2, C_1 og C_2 rekursivt. Hvis man er i tvivl om, hvordan (26) ser ud, kan man bare tænke på den som et ganske almindeligt CES-prisindeks, hvor der er divideret e_1 og e_2 op i priserne.

6. Fortolkning af nytteeffektiviteter

Det skal understreges, at det med ”nytteeffektiviteter” ikke skal tages mere bogstaveligt end f.eks. effektivitetsindeksene for kapital og arbejdskraft i ADAMs faktorblok. Effektiviteterne er i bund og grund et nyttigt matematisk hjælpemiddel, som letter genbrug af funktionsformer og letter fortolkningerne på tværs af forskellige funktionsformer. Men der er altså kun tale om hjælpevariabler og ikke om noget, der kan måles og vejes.

Hvis man alligevel skal forsøge sig med en fortolkning kan man sige, at hvis C_1 f.eks. er boligforbruget og C_2 andet forbrug, har man historisk kunnet observere, at der har været et skift i efterspørgslen i retning af boliger, fordi folk er blevet mere velhavende. Matematisk vil dette kunne oversættes til et fald i e_1, svarende til at nytteeffektiviteten pr. boligforbrugsenhed er faldet i takt med, at den samlede nytte er steget (i hvert fald indtil der intrådte et mætningspunkt omkring 1985). Man kan også sige det på den måde, at i takt med, at den samlede nytte er steget i den historiske periode, har der skullet

[13] Der gælder generelt, at effektivitetsindeks indsættes i en omkostningsfunktion ved at dividere effektivitetsindeksene op i priserne.

mere og mere boligforbrug til for at give den samme "bolig-mæthedsfornemmelse" hos forbrugerne. Set i forhold til andet forbrug "mættede" en kvadratmeter således meget mere i 1950'erne end den f.eks. gjorde i perioden 1965-85, hvor boligforbruget boomede, og derfor kan man fortolke det på den måde, at bolig-nytteeffektiviteten faldt i 1965-85.

At Marshall-efterspørgslerne ikke kan opskrives analytisk er ikke nødvendigvis noget stort problem i simulationsøjemed, da PCIM burde kunne håndtere dette. Der er en del fordele ved at forsøge at tage udgangspunkt i en omkostningsfunktion fremfor en indirekte nyttefunktion, herunder at alle resultaterne fra litteraturen om faktorefterspørgselssystemer kan genbruges uden videre. Man ved f.eks., at CES-omkostningsfunktionen er globalt konsistent, at GL-omkostningsfunktionen har det bedst med små elasticiteter, og at translog-omkostningsfunktionen har det bedst med høje elasticiteter i omegnen af Cobb-Douglas osv. Så en fordel ved at bruge et effektivitesudvidet CES-system til f.eks. boligefterspørgslen i ADAM ville være, at funktionsformen er globalt konsistent også når der indbygges indkomsteffekter (i form af nytteafhængige nytteeffektiviteter), og der kan i princippes tilføjes CES-undernest på lavere niveauer à la den måde det gøres på i AGL-modeller (bl.a. med bedre muligheder for at beregne meningsfulde velfærdsbegreber såsom ækvivalerende variation).

En anden fordel ved at tage udgangspunkt i velkendte omkostningsfunktioner og udvide disse med effektivitetsindeks er, at det er forholdsvist uproblematisk at tilføje eksogene påvirkninger af præferencerne (trender, dummier mv.), da disse blot kan lægges ind som ekstra led i nytteeffektiviteterne. Der er således ikke tale om, at de eksogene effekter f.eks. skal tilsættes som ekstra led i omkostningsfunktionen, for i så fald har man alle problemerne med, om omkostningsfunktionen så stadigvæk overholder de fornødne teoretiske egenskaber (f.eks. homogenitet i priserne). Og hvad angår nytteeffektiviteternes afhængighed af U (= M/P_{12}), kan man også dér bruge præcis den funktionsform, man ønsker (f.eks. logistisk indtrængning/mætning hvis dette virker mest rimeligt), uden at skulle bekymre sig om konsistensen af den resulterende omkostningsfunktion.

7. Rationalet for brug af effektivitetsindeks

Man kan måske spørge sig selv, om det er "tilladt" uden videre at proppe nytteniveauet ind i et effektivitetsindeks, eller om der er et eller andet "catch" ved det? Det virker tilforladeligt nok at putte tiden t ind i effektiviteterne, men U er ligesom mere endogen. Men så vidt jeg kan se, er der ikke noget catch. Begrundelsen er som følger:

1. Der er ikke matematisk set nogen forskel på nytte- og produktionsfunktioner og de tilhørende forbrugs- og faktorefterspørgselssystemer. Forskellen er kun om man maksimerer nytten for givet budget eller minimerer omkostningerne for given produktion, men man kan i begge tilfælde benytte præcis den samme CES-funktion.

2. Derfor har nytteeffektiviteterne sin pendant i faktorefterspørgselsfunktioner i form af produktionsafhængige effektivitetsindeks. Altså at de afhænger af både tiden og produktionsniveauet, e = e(t, Y). Hvis det kan tillades dér, må det også være tilladeligt at operere med e = e(t, U) i forbrugssystemer.

3. At formen e = e(t, Y) i faktorefterspørgselssystemer kan tillades er sådan set vist i min artikel *Short cuts to dynamic factor demand modelling* fra 2000, og i artiklen er det vist, at hvis man tager en helt barberet translog-omkostningsfunktion uden skalaeffekter eller trends og tilsætter effektivitetsindeks af formen e = e(t, Y), så får man identisk den samme translog-omkostningsfunktion (med skalaeffekter og trends), som bruges i litteraturen (blot omparametriseret). Så effektivitetsindeks af formen e = e(t, Y) fungerer helt uproblematisk for translog-funktionen, og da denne er fleksibel nok til at kunne efterligne en hvilken som helst omkostningsfunktion, bør e = e(t, Y) vel kunne bruges helt generelt. Jeg kan ikke se noget catch ved det (men hører gerne nærmere hvis nogen kan), og der har da heller ikke været nogen indvendinger (som jeg har hørt om) mod 2000-artiklens konklusion vedrørende generel brug af e(t, Y)-effektivitetsindeks til indbygning af trend- og skalaeffekter.

8. Estimationsteknik

Hvis man ser på systemet i (26)-(30) ligger følgende procedure lige for:

1. Start med at udregne P_{12} som f.eks. et Törnqvistkædeindeks.
2. Estimér (27)-(30).
3. Beregn P_{12} ud fra (26), givet effektiviteterne fra 2.
4. Gå til 2.

Man gør ofte noget lignende vedrørende AIDS-systemets samlede prisindeks, men problemet er, at man ikke får (helt) det rigtige, forstået som det samme som man ville få, hvis man kunne løse (26)-(28) analytisk og indsætte i (29)-(39). Se evt. Appendiks A.

Desværre kan man ikke for CES-funktionen løse (26)-(28) analytisk, og jeg har forsøgt forskellige smutveje omkring dette problem, herunder at lave en taylorapproksimation. Men det bliver hurtigt ret langhåret at kode. Problemet er, at TSP ikke kan håndtere at estimere (med LSQ) ligninger, hvor løsningen til en hjælpevariabel er givet implicit (og skal itereres frem *mens* LSQ ligger og optimerer). Lidt ærgerligt, for TSP har faktisk en ret god løsningsalgoritme indbygget (som bruges i bl.a. SIML-ordren). Man *kan* operere med implicit løste ligninger, hvis man bruger TSP's ML PROC funktionalitet, men så skal man selv skrive likelihoodfunktionen op. Og det viser sig, at den måde at optimere på ikke er nær så god som LSQ og divergerer for selv meget enkle estimationer.

Jeg er til sidst nået frem til, at en farbar vej er at starte med et Törnqvistkædeindeks som proxy for P_{12} og så indsætte det i (26)-(28) rekursivt et antal gange. Altså svarende til at man f.eks. har ligningen $X = 0.5\ X + 2$ og indsætter ligningen i sig selv et antal gange:

$X = 0.5\ \ X + 2$
$X = 0.5\ \ (0.5\ \ X + 2) + 2$
$X = 0.5\ \ (0.5\ \ (0.5\ \ X + 2)\ + 2) + 2$
$X = 0.5\ \ (0.5\ \ (0.5\ \ (0.5\ \ X + 2) + 2)\ + 2) + 2$

Hvis man så starter med et rimeligt bud på X (f.eks. $X = 1$), fås en god tilnærmelse af X efter fire indsættelser (konkret 3.81, hvor den sande værdi er 4). Tilnærmelsen afhænger selvfølgelig af endogeniteten, og jo større feedback der er, jo større fejl får man.

Når man estimerer på den måde, kan man bagefter regne ud, om approksimationen er god nok (vha. SIML-ordren). Men andre ideer modtages gerne. Der er store fordele ved at holde sig til TSP, for jeg har prøvet at lave det samme i både Ox og Gauss. Og problemet er der, at de konvergerer væsentligt dårligere end TSP (hvis overhovedet), fordi de – ligesom TSP's ML PROC-procedure – anskuer det som et helt generelt optimeringsproblem af et antal parametre. Og der er ikke tvivl om, at LSQ udnytter viden (og sikkert diverse tricks) vedrørende f.eks. kovariansmatricen til at sikre hurtig og stabil konvergens.

8. 1 Mere estimationsteknik

Det kan endelig nævnes, at man naturligvis ikke kan estimere begge effektivitetsindeks i et system som (26)-(30). Ét af dem er nødt til at være "numeraire", eller også skal de være bundet sammen. En god måde at binde dem sammen på er f.eks. at lade e_2 være fri og så kræve følgende:

$e_1 = e_2^{-s2/s1}$

hvor $s1$og $s2$ er omkostnings/budgetandele i et givet (basis)år. Ved at bruge den formulering kan man vise, at det aggregerede prisindeks får en vækstrate, som ligner vækstraten i et Törnqvistkædeindeks så meget som muligt.

Mere om dette i det endelige papir...

Også mere om, hvor meget det egl. betyder at bruge det "rigtige" aggregerede prisindeks, fremfor at approksimere med et Törnqvist- eller Laspeyreskædeindeks. Det kan også komme på tale at *estimere* med "snyde-kædeindeksene", men så alligevel bygge systemet i PCIM med de "rigtige" prisindeks for at være mere sikker på konsistensen ved store ændringer i indkomst eller relative priser i lange fremskrivninger.

Appendiks A. Problemet med en iterativ procedure

Man kan som eksempel forestille sig følgende likelihoodfunktion og prisfunktion:

$$L = -(\beta^2 + P)$$
$$P = 0.5(1-2\beta) + 0.5P$$

Her er β den parameter, vi gerne vil estimere, mens P er et prisindeks, som afhænger af denne parameter (og sig selv). Man kan antage, at trin ét er at konstruere P som f.eks. et Törnqvist-kædeindeks, men uanset P's værdier vil maksimum for likelihoodfunktionen findes for $\beta = 0$.

Indsætter man imidlertid prisligningen, fås følgende likelihoodfunktion:

$$L = -(\beta^2 + 0.5(1-2\beta) + 0.5P)$$

Denne likelihoodfunktion har maksimum for $\beta = 0.5$. Indsættes prisfunktionen én gang til, fås $\beta = 0.75$, og dette vil konvergere mod den sande værdi $\beta = 1$. Den sande værdi fås ved at løse prisfunktionen for P og indsætte i likelihoodfunktionen, hvorved der fås

$$L = -(\beta^2 + (1-2\beta))$$

Minimum for denne er $\beta = 1$.