Danmarks Statistik
MODELGRUPPEN

Arbejdspapir*

Per Bremer Rasmussen

27. januar 1993

Usercost-udtrykket i udbudsprojektet: Teori

Resumé:

Der gives en kort gennemgang af den teoretiske begrundelse for formuleringen af usercost-udtrykket, sådan som det er sket både i ADAMs nuværende investeringsrelationer og i udbudsprojektet.

c:\tekst\userc_1.wp

Nøgleord: Usercost, faktorefterspørgsel, afskrivningsregler, optimal kontrolteori.

1. Indledning

I ADAMs nuværende investeringsrelationer anvendes følgende usercost-begreb:

$$u^{i} = \frac{(1 - s_y z) q \left[(1 - s_y) i + \delta - \frac{\dot{p}^{e}}{p} \right]}{p (1 - s_y)}$$

hvor:

u	=	usercost
s_y	=	selskabsskattesats
z	=	tilbagediskonterede værdi af alle fremtidige afskrivninger på 1 kr. investeret kapital i det aktuelle år.
i	=	den nominelle rentesats (den gennemsnitlige obligationsrente)
δ	=	den fysiske afskrivningsrate
q	=	investeringsprisen
p	=	færdigvareprisen (sektorprisen)
p^e	=	forventede værdi af p
$\dot{P}$	=	$\frac{dP}{dt}$

der er tale om et relativt *efter skat* usercost-begreb, hvor de nominelle usercost *efter skat* (tælleren) er sat i forhold til færdigvareprisen - *efter skat*.

I udbudsprojektet anvendes et meget lignende udtryk, nemlig:

$$u^{u} = \frac{(1 - s_y z) q \left[(1 - s_y) i + \delta - \alpha \frac{\dot{p}^{e}}{p} \right]}{(1 - s_y)}$$

hvor α er en vægt til inflationsforventningerne, der pt. ikke er lagt helt fast.

Der er tale om et nominelt usercost-udtryk, hvor der er omregnet til det *før-skat-begreb*, der er relevant i et omkostningsminimeringsproblem, hvor de øvrige priser også er *før skat*. I udbudsprojektet bliver der i estimationerne alligevel tale om et relativt *efter skat* usercost-begreb; men relativt til en anden faktorpris, eksempelvis lønnen. Det skyldes, at omkostningsfunktionen pålægges homogenitet af 1. grad i samtlige faktorpriser, og faktorefterspørgselsfunktionerne derfor er homogene af 0. grad i samme priser. Derved bliver det de relative faktorpriser *efter skat*, der bliver afgørende for faktorforholdene og produktionsniveauet, der afgør niveauerne.

I det følgende vil den *teoretiske* begrundelse for begreberne blive gennemgået, og det vises, at usercost-begrebet fra investeringsrelationerne kan fås ud fra løsningen til et intertemporalt profitmaksimeringsproblem, mens begrebet fra udbudsprojektet fås fra det tilsvarende omkostningsminimeringsproblem til given produktion. I et andet papir diskuteres nogle praktiske problemer med at operationalisere omkostningsbegrebet[1].

2. Teoretisk udledning af usercost i en simpel model uden skatter

Under en række meget restriktive forudsætninger bliver virksomhedens optimeringsproblem rimeligt simpelt, og specielt bliver optimalitetsbetingelserne meget simple og let forståelige. Dette demonstreres kort først, fordi det bliver en hel del mere indviklet, når vi nærmer os virkelighedens verden.

Vi ser først på profitmaksimeringsproblemet. Antages det,

- at der eksisterer et perfekt kapitalmarked
- at der er fuld sikkerhed mht. fremtidige priser, eller blot at virksomheden danner forventninger mht. disse og reagerer, som om de forventede værdier var ikke-stokastiske
- at kapital kan aggregeres[2]
- at virksomheden er pristager i alle markeder
- at der ikke er transaktionsomkostninger i forbindelse med installation og nedtagning af kapitaludstyr

samt at virksomheden har en pæn (= neoklassisk) produktionsfunktion med - for simpelheds skyld - to produktionsfaktorer (K=kapital og L=arbejdskraft), der udviser faldende skalaafkast:

$$y = F(K,\ L)$$

Virksomhedens problem er herefter at maksimere nutidsværdien af den betalingsstrøm, den har i al fremtid. Betalingsstrømmen er, forudsat der ses bort fra skatter af enhver art:

$$pF(K,L) - wL - qI \tag{1}$$

hvor p er færdigvareprisen, w løn, I investeringerne og q deres pris. Dateringen t er udeladt, hvor der ikke hersker tvivl.

[1]Per Bremer Rasmussen: Usercost-udtrykket i udbudsprojektet: Nogle praktiske problemstillinger. *Arbejdspapir fra Modelgruppen*, 28. januar 1993.

[2]Dvs. at kapital, der ikke er afskrevet (nedrevet) har samme produktivitet uanset installationstidspunkt.

Virksomhedens problem kan herefter formuleres (i kontinuert tid) som:

$$\begin{aligned}&\textit{Maximer} \quad \int_0^{\infty} [p(t)F[K(t),L(t)] - w(t)L(t) - q(t)I(t)]e^{-rt}dt \\ &\textit{under bibetingelsen}: \dot{K}(t) = I(t) - \delta K(t)\end{aligned} \qquad \textbf{(2)}$$

hvor der skal maksimeres mht. I og L. δ er lig den fysiske afskrivningsrate og r er diskonteringsfaktoren, der for letheds skyld er forudsat konstant.[3]

Problemet er løst i appendiks 1 og giver flg. betingelser for alle t:

$$p(t)F_K = q(t)\left[r + \delta - \frac{\dot{q}(t)}{q(t)}\right] \qquad \textbf{(3)}$$

Venstresiden er den marginale omsætningsstigning ved at øge indsatsen af kapital en enhed, mens højresiden er omkostningerne ved at bruge en enhed kapital en periode, dvs. usercost. Bemærk, at højresiden minder en hel del om usercost-begrebet i ADAMs nuværende investeringsrelationer, hvis selskabs-skattesatsen i sidstnævnte sættes lig 0, og vi et øjeblik glemmer alt om usikkerhed og dermed forventninger. Den eneste forskel er da, at vi ikke har defineret diskonteringsfaktoren nærmere. Men den kan sættes lig den nominelle rente, givet altså, at vi ser bort fra skat.

Fortolkningen af højresiden er forholdsvis klar. Omkostningerne ved at bruge en enhed kapitaludstyr er, udover prisen, (alternativ-) forrentningen og de fysiske afskrivninger; men på positivsiden kommer eventuel prisstigning på det investerede kapitalgode. I de fleste (jeg burde nok skrive: de, jeg har set) teoretiske modeller sondres der ikke mellem investeringspriser og priser på kapitalgoder; men det er klart, at den relevante pris, hvis der sondres, er kapitalgodeprisen. Divideres (3) igennem med færdigvareprisen fås et "realt" usercost-begreb, der entydigt fastlægger hvordan det optimale kapitalapparat afhænger af rente, afskrivningsrate, pris på færdigvare samt prisstigning på kapitalgodet.

Det er ret let at se, at (3) ikke ændres under forudsætning af, at der pålægges en proportionalskat på (1); men sådan beskattes ikke i praksis. Det ville forudsætte øjeblikkelig afskrivning af investeringerne.
Problemstillingen bliver teknisk set noget mere kompliceret, når der introduceres et skattesystem med afskrivningsregler; men optimalitetsbetingelsen og

[3] Er diskonteringsfaktoren ikke konstant ændrer det ikke fundamentalt ved problemet: man skal erstatte rt med

$$\int_0^t r(s)ds$$

.

fortolkningen af denne er en forholdsvis simpel udvidelse af (3).

Antages alternativt, at virksomheden omkostningsminimerer givet produktionen y, og gøres iøvrigt de samme antagelser som ovenfor, bortset fra, at vi ikke længere behøver antagelsen om aftagende skalaafkast for at sikre eksistens af en løsning til optimeringsproblemet, kan vi løse virksomhedens problem:

$$\begin{aligned} &\mathit{Minimer} \quad \int_0^\infty \left[w(t)L(t) + q(t)I(t)\right] e^{-rt} dt \\ &\mathit{under\ bibetingelserne}: \ \dot{K}(t) = I(t) - \delta K(t) \quad \mathit{og} \quad y(t) \leq F\left[K(t), L(t)\right] \end{aligned} \tag{4}$$

Dette problem er løst i appendiks 1 og giver:

$$\frac{F_K}{F_L} = \frac{q(t)\left[r + \delta - \dfrac{\dot{q}(t)}{q(t)}\right]}{w(t)} \tag{5}$$

Forskellen på (3) og (5) svarer præcis til den forskel, man får i et statisk optimeringsproblem.

Da F_K er en aftagende og F_L er en voksende funktion af kapitalapparatets størrelse, for givet niveau af de øvrige produktionsfaktorer, fås, givet dette niveau, en entydig sammenhæng mellem det optimale kapitalapparats størrelse og usercost; men her er det altså relative usercost, relativt til den anden (de øvrige) faktorpris(er).

3. Teoretisk udledning af usercost i en model med skatter

Introduceres et skattesystem bliver virksomhedens betalingsstrøm en simpel udvidelse af (1):

$$pF(K,L) - wL - qI - T$$

hvor T er de samlede skattebetalinger. Man kan i princippet forestille sig, at virksomhederne beskattes med én sats for løbende indkomst, med en anden for kapitalgevinster og endelig af selve formuen/egenkapitalen. Det danske skattesystem svarer til et specialtilfælde af dette, hvor løbende indkomst og kapitalgevinster beskattes med selskabsskattesatsen og der ikke er nogen formuebeskatning i virksomhederne. Der er dog den krølle, at det kun er realicerede kapitalgevinster på kapitaludstyret, der beskattes: Et kapitalgode beskattes, hvis det sælges til en pris over, hvad det er afskrevet til.

Generelt har vi altså:

$$T = s_y\{py - wL - \Delta_s\} + s_k\dot{q}K + s_f qK$$

hvor:

- s_y = selskabsskattesats, dvs. beskatning af løbende indkomst
- s_k = skattesats for beskatning af kapitalgevinster
- s_f = formueskattesats for virksomheder
- Δ_s = samlede skattemæssige afskrivninger på det betragtede tidspunkt

Herefter kan virksomhedens problem, svarende til (2), skrives som:

$$\begin{aligned} Maximer \quad & \int_0^\infty [(1-s_y(t))\{p(t)F[K(t),L(t)] - w(t)L(t)\} - q(t)I(t) \\ & + s_y(t)\Delta_s(t) - s_k(t)\dot{q}(t)K(t) - s_f(t)q(t)K(t)]e^{-rt}dt \end{aligned} \qquad \textbf{(6)}$$

$$under\ bibetingelsen:\ \dot{K}(t) = I(t) - \delta K(t)$$

Problemet er løst i appendiks 2 og giver flg. betingelser for alle t:

$$[1-s_y(t)]p(t)F_K = q(t)\left\{[1-s_y(t)z(r)]\left[r + \delta - \frac{\dot{q}(t)}{q(t)}\right] + s_k(t)\frac{\dot{q}(t)}{q(t)} + s_f(t)\right\} \qquad \textbf{(7)}$$

hvor z(r) er den tilbagediskonterede værdi af de skattemæssige afskrivninger, der kan udledes til:

$$z(r) = \int_0^{\infty} D(s)e^{-rs}ds$$

hvor D(s) betegner den del af en s perioder gammel investering, der skattemæssigt kan afskrives nu.

Det er herefter klart, hvordan udtrykket skal tolkes, og der er ikke tvivl om før- og efter-skat-begreber. Højresiden i (7) er usercost *efter* skat, ligesom venstresiden er "marginal revenue product" *efter* skat. Divideres (5) igennem med $(1-s_y)p(t)$ fås relative usercost, der kan siges at være faktorpris i forhold til outputpris, når der på passende måde er korrigeret for skattesystemets behandling af afskrivninger. Relative usercost anvendes som forklarende variabel, fordi det entydigt fastlægger det optimale kapitalapparat ud fra de forklarende variabler via kapitalapparatets marginalprodukts afhængighed af selve kapitalapparatet: Stigende usercost kræver højere marginalprodukt af kapital og dermed et mindre optimalt kapitalapparat.

Det er sidstnævnte begreb, der anvendes i ADAM. Sættes $s_k = s_f = 0$, og defineres kalkulationsrentefoden r som en nominel efter-skat rente: $(1-s_y)i$, hvor i er den relevante nominelle rente (her valgt som den gennemsnitlige obligationsrente), fås med en enkelt modifikation det relative usercost-udtryk, der anvendes i ADAM.[4] Modifikationen består i, at $\dot{q}/q$ bør være den *forventede* inflation i prisen på kapitalgodet, som ikke er observerbar. Den forventede værdi er ikke observerbar, og det er den faktiske værdi heller ikke. Man kan groft set argumentere for to løsningsmuligheder. Man kan approksimere den forventede værdi med et lagpolynomium i enten sektorprisen eller investeringsprisen. I ADAM er valgt førstnævnte mulighed.[5]

Helt svarende til afsnit 2 fås, hvis vi i stedet antager omkostningsminimering til given produktion, flg. optimalitetsbetingelse for alle t:[6]

$$\frac{F_K}{F_L} = \frac{q(t)\left\{[1-s_y(t)z(r)]\left[r + \delta - \frac{\dot{q}(t)}{q(t)}\right] + s_k(t)\frac{\dot{q}(t)}{q(t)} + s_f(t)\right\}}{w(t)\left(1 - s_y(t)\right)} \qquad \textbf{(8)}$$

Det usercost-begreb, der er anvendt ved estimation af faktorefterspørgselsfunktionerne på baggrund af translogomkostningsfunktionerne, er netop en variant

---

[4]Der ses altså bort fra, at værdistigninger på kapitaludstyr, ud over hvad kapitaludstyret er afskrevet til, beskattes, hvis de realiseres.

[5]I ovennævnte papir er disse løsningsmodeller sammenlignet.

[6]Problemet er løst i appendiks 2.

af (8), hvor $s_k = s_f = 0$, $r = (1\text{-}s_y)i$, og hvor der ikke divideres igennem med w. Sidstnævnte skyldes, at når de øvrige faktorpriser kommer ind som før-skat-begreber, og minimumsomkostningsfunktionen er forudsat homogen af 1. grad i samtlige faktorpriser og faktorefterspørgselsfunktionerne dermed er homogene af 0. grad i disse priser, er

$$u^u = \frac{q(1 - s_y z)\left[(1-s_y)i + \delta - \alpha \frac{\dot{p}^e}{p}\right]}{(1 - s_y)}$$

det relevante usercost-begreb.

4. Indeksering/afskrivning til *gen*anskaffelsespriser

I afsnit 3 er det antaget, at de skattemæssige afskrivninger sker til anskaffelsespriser. Alternativt kunne man betragte afskrivning til genanskaffelsespriser, eller en eller anden form for indeksering af afskrivningsgrundlaget. Hvad man end gør, ændrer det ikke ved (8); men alene ved definitionen af $z(r)$. Ved skattemæssig afskrivning til anskaffelsespriser havde vi:

$$z(r) = \int_0^\infty D(s)e^{-rs}ds$$

Ved indeksering af afskrivningsgrundlaget, hvor g er vækstraten i indekseringsfaktoren, eller - hvilket er det samme - ved skattemæssig afskrivning til genanskaffelsespriser, hvor g er vækstraten i investeringsprisen, fås, jf. appendiks 2:

$$z(r,g) = \int_0^\infty D(s)e^{-(r-g)s}ds$$

Den tilbagediskonterede værdi af de skattemæssige afskrivninger er - ikke overraskende - en voksende funktion af væksten i investeringsprisen/afskrivningsgrundlaget.

Det ses specielt, at hvis $\int_0^\infty D(s)\,ds = 1$, dvs. at man skattemæssigt kan afskrive hele investeringen, gælder:

$$z(r,g) \geq 1 \quad for \quad g \geq r$$
$$z(r,g) \leq 1 \quad for \quad g \leq r$$

Der har i en del af estimationsperioden for både investeringsrelationer og faktorefterspørgselsfunktionerne været en eller anden form for indeksering i Danmark. Den ophørte ved nedsættelsen af selskabsskatten fra og med 1990. Alligevel følger definitionen af z $z(r)$.

Appendiks 1. Udledning af usercost-begrebet under meget simple forudsætninger.

Problemet (2) på side 3 kan løses som et optimalt kontrolproblem[7], hvor Hamiltonfunktionen H er:

$$H(t,K,L,I,\mu) = \left[p(t)F[K(t),L(t)] - w(t)L(t) - q(t)I(t)\right]e^{-rt} + \mu(t)\left[I(t) - \delta K(t)\right]$$

Eksisterer der en løsning til problemet, er denne givet ved flg. betingelser, der skal gælde for ethvert positivt t:

$$\dot{\mu}(t) = -\frac{\partial H}{\partial K}$$
$$\frac{\partial H}{\partial I} = 0 \qquad \textbf{(A1.1)}$$
$$\frac{\partial H}{\partial L} = 0$$

idet det forudsættes, at der ikke er restriktioner på I og L, der bliver bindende. Fra (A1.1) og Hamiltonfunktionen fås:

$$\dot{\mu} = -p(t)F_K e^{-rt} + \mu(t)\delta$$
$$\frac{\partial H}{\partial I} = -q(t)e^{-rt} + \mu(t) = 0 \;\Rightarrow\; \mu(t) = q(t)e^{-rt}$$
$$\frac{\partial H}{\partial L} = \left[p(t)F_L - w(t)\right]e^{-rt} = 0 \;\Rightarrow\; F_L = \frac{w(t)}{p(t)}$$

Den sidste betingelse er den velkendte "marginalprodukt af arbejdskraft lig realløn". Betingelsen for kapitalapparatet er ikke umiddelbart indlysende; men differentieres den anden betingelse mht t:

$$\dot{\mu}(t) = \dot{q}(t)e^{-rt} + q(t)(-r)e^{-rt}$$

og indsættes dette i første betingelse fås:

(A1.2)

[7]Jf. Knut Sydsæter: Matematisk Analyse II. 3. udgave, Universitetsforlaget, Oslo. (kap 9, afsnit 12, sætning 9.10). Problemet kan i virkeligheden lettere løses som et variationsregningsproblem, da der ikke er restriktioner på kontrolregionen; men det kan det tilsvarende omkostningsminimeringsproblem ikke. Det er derfor valgt at anvende ens løsningsmetoder i de to tilfælde.

$p(t)F_K = q(t)\left[r + \delta - \frac{\dot{q}(t)}{q(t)}\right]$ hvilket præcis er (3) på side 4.

Antages alternativt omkostningsminimering, er virksomhedens problem

$$Maksimer \quad -\int_0^{\infty}\left[w(t)L(t) - q(t)I(t)\right]e^{-rt}dt$$

$$under\ bibetingelserne\colon\ \dot{K}(t) = I(t) - \delta K(t) \quad og \quad y(t) \leq F\left[K(t),L(t)\right]$$

hvilket giver Hamiltonfunktionen:

$$\begin{aligned} H(t,K,L,I) = -\left[w(t)L(t) + q(t)I(t)\right]e^{-rt} &+ \mu(t)\left[I(t) - \delta K(t)\right] \\ &+ \lambda\left[F(K(t),L(t)) - y(t)\right] \end{aligned}$$

og følgende optimalitetsbetingelser:

$$\begin{aligned} &\dot{\mu} = -\frac{\partial H}{\partial K} = \mu\delta - \lambda F_K \\ &\frac{\partial H}{\partial I} = 0 \Rightarrow \mu = qe^{-rt} \\ &\frac{\partial H}{\partial L} = 0 \Rightarrow -we^{-rt} + \lambda F_L = 0 \Rightarrow \lambda = \frac{we^{-rt}}{F_L} \end{aligned}$$

Ved differentiation af 2. betingelse mht t fås:

$$\dot{\mu} = -rqe^{-rt} + \dot{q}e^{-rt}$$

og ved indsættelse af 1. og 3. betingelse heri fås endelig:

$$\frac{F_K}{F_L} = \frac{q(t)\left[r + \delta - \frac{\dot{q}(t)}{q(t)}\right]}{w(t)}$$

hvilket er (5) på side 5.

Appendiks 2. Udledning af usercost-begrebet under et skattesystem med afskrivningsregler og forskellig beskatning af forskellige typer indkomst- og formuebegreber.

Ligesom i appendiks 1 kan dette lidt mere komplicerede problem løses som et variationsregningsproblem (dette er, under forudsætning om profitmaksimering, gjort i Bjørn;[8] men er også her kort fremstillet som et optimalt kontrolproblem med uendelig tidshorisont for at lette korrespondancen til omkostningsminimeringsproblemet.

Behandlingen af de skattemæssige afskrivninger i det følgende følger direkte Bjørn.

I (6) har vi ikke nærmere defineret Δ_s, og det er præcis her problemet bliver lidt mere indviklet end det, der er vist i appendiks 1. Dette problem behandles derfor først.

Lad *D(s)* betegne den andel af en investering af alder *s*, der skattemæssigt kan afskrives på nuværende tidspunkt. De samlede skattemæssige afskrivninger på et vilkårligt tidspunkt t, kan da, forudsat at der afskrives til *anskaffelsespriser*, skrives som:

$$\Delta_s(t) = \int_0^\infty D(s)q(t-s)I(t-s)ds$$

En del af disse afskrivninger har virksomheden ikke indflydelse på på beslutningstidspunktet 0, idet de hidhører fra investeringer før tidspunkt 0. Vi kan altså opdele afskrivningerne i to dele:

$$\Delta_s(t) = \Delta_1(t) + \Delta_0(t) = \int_0^t D(s)q(t-s)I(t-s)ds + \int_t^\infty D(s)q(t-s)I(t-s)ds \qquad \textbf{(A2.1)}$$

hvor kun første led er interessant for virksomhedens optimering.

Dette led indgår i optimeringsproblemet som:

$$\Im = \int_0^\infty \Delta_1(t)e^{-rt}dt = \int_0^\infty e^{-rt}\int_0^t D(s)q(t-s)I(t-s)ds\,dt \qquad \textbf{(A2.2)}$$

og det kan nu betale sig at rokere lidt rundt på det, bla. for at slippe af med dobbeltintegralet. Vi integrerer vha. substitution. Vi definerer x=t-s og y=s. Afbildningen fra (t,s) til (x,y) er enentydig med jacobymatrix

[8]Bjørn, E: Avskrivningsregler og prisen på bruk av realkapital. *Artikler* nr. 74, Statistisk Sentralbyrå, 1975.

$$J = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

der har determinant lig 1. Ligeledes er billedmængden af definitionsområdet ved afbildningen R^2_+. Vi får derfor:

$$\Im = \int_0^\infty \int_0^\infty e^{-r(x+y)} D(y) q(x) I(x) dy dx = \int_0^\infty e^{-rx} z(r) q(x) I(x) dx \qquad \textbf{(A2.3)}$$

hvor:

$$z(r) = \int_0^\infty e^{-ry} D(y) dy$$

Indsætter vi nu *(A2.3)* sammen med definitionen af $\Delta_0(t)$ fra *(A2.1)* i (6) får vi et lidt mere tilgængeligt udtryk:

$$\begin{aligned} \textit{Maximer} \quad & \int_0^\infty [(1-s_y(t))\{p(t)F[K(t),L(t)] - w(t)L(t)\} - q(t)I(t) \\ & + s_y(t)\Delta_0(t) + s_y z(r) q(t) I(t) - s_k(t)\dot{q}(t)K(t) - s_f(t)q(t)K(t)]e^{-rt}dt \end{aligned}$$

$$\textit{under bibetingelsen}: \ \dot{K}(t) = I(t) - \delta K(t)$$

Vi får nu parallelt med appendiks 1, Hamiltonfunktionen

$$\begin{aligned} & H(t,K,L,I) = \\ & \quad \{(1-s_y)[pF(K,L)-wL] - (1-s_y z(r))qI + s_y\Delta_0 - s_k\dot{q}K - s_f qK\}e^{-rt} \\ & \quad + \mu[I-\delta K] \end{aligned}$$

og følgende optimalitetsbetingelser:

$$\begin{aligned} \dot{\mu} &= -\frac{\partial H}{\partial K} = -\{(1-s_y)pF_k - s_k\dot{q} - s_f q\}e^{-rt} + \mu\delta \\ \frac{\partial H}{\partial I} &= -[1-s_y z(r)]qe^{-rt} + \mu = 0 \\ \frac{\partial H}{\partial L} &= (1-s_y)[pF_L - w] = 0 \end{aligned} \qquad \textbf{(A2.4)}$$

Fra 2. ligning i (A2.4) fås:

$$\dot{\mu} = \left[1 - s_y z(r)\right]\dot{q}e^{-rt} - r\left[1 - s_y z(r)\right]qe^{-rt}$$

som indsat i 1. ligning i (A2.4) og efter lidt omskrivning giver:

$$[1 - s_y(t)]p(t)F_K = q(t)\left\{[1 - s_y(t)z(r)]\left[r + \delta - \frac{\dot{q}(t)}{q(t)}\right] + s_k(t)\frac{\dot{q}(t)}{q(t)} + s_f(t)\right\}$$

hvilket netop er betingelsen (7) på side 6.

Fra 3.ligning i (A2.4) fås direkte:

$$F_L = \frac{w}{p}$$

den velkendte betingelse for optimal anvendelse af arbejdskraft, som altså er upåvirket af skattesystemet. Det der gør det mere indviklet med investeringer end med arbejdskraft er netop, at det ikke er betalingsstrømmen der beskattes. Der indbygges altså en art skatte-"forvridning" vha. af bla. afskrivningsreglerne og dermed beskatningsgrundlaget.

Antages alternativt omkostningsminimering til givet y, er problemet altså:

$$\begin{aligned} \textit{Maximer} \quad -\int_0^\infty & [(1 - s_y(t))w(t)L(t) + q(t)I(t) - s_y(t)\Delta_0(t) \\ & - s_y(t)z(r)q(t)I(t) + s_k(t)\dot{q}(t)K(t) + s_f(t)q(t)K(t)]e^{-rt}dt \end{aligned}$$

$$\textit{under bibetingelserne}: \dot{K}(t) = I(t) - \delta K(t) \quad \textit{og} \quad y(t) \leq F[K(t),L(t)]$$

Hamiltonfunktionen bliver dermed:

$$\begin{aligned} H(t,K,L,I) = & -\left\{(1 - s_y(t))w(t)L(t) + q(t)I(t) - s_y(t)\Delta_0(t)\right\}e^{-rt} \\ & - \left\{s_y(t)z(r)q(t)I(t) + s_k(t)\dot{q}(t)K(t) + s_f(t)q(t)K(t)\right\}e^{-rt} \\ & + \mu(t)(I(t) - \delta K(t)) + \lambda\left[F[K(t),L(t)] - y(t)\right] \end{aligned}$$

og følgende optimalitetsbetingelser:

$$\dot{\mu} = -\frac{\partial H}{\partial K} = \left[s_k\dot{q} \quad s_f q\right]e^{-rt} + \mu\delta - \lambda F_K$$

$$\frac{\partial H}{\partial I} = 0 \Rightarrow \mu = [1 - s_y z(r)]qe^{-rt}$$

$$\frac{\partial H}{\partial L} = 0 \Rightarrow -[1 - s_y]we^{-rt} + \lambda F_L = 0 \Rightarrow \lambda = \frac{[1 - s_y]we^{-rt}}{F_L}$$

Differentieres 2. betingelse mht. t og indsættes 1. og 3. betingelse fås:

$$\frac{F_K}{F_L} = \frac{q\left\{[1-s_y z(r)]\left[r + \delta - \frac{\dot{q}}{q}\right] + s_k\frac{\dot{q}}{q} + s_f\right\}}{w\left(1 - s_y\right)}$$

hvilket netop er (8) på side 7.