Danmarks Statistik
MODELGRUPPEN

Arbejdspapir*

Per Bremer Rasmussen

8. juni 1993

Kort- og langsigtsfaktorefterspørgselsfunktioner baseret på CES produktionsfunktionen

Resumé:

I dette papir gennemgås udledningen af kort- og langsigtede faktorefterspørgselsfunktioner baseret på CES produktionsfunktionen.

De analyser, der allerede er lavet på baggrund af translogomkostningsfunktionen viser, at hypoteser om en simpel CD teknologi eller en simpel ikke nestet CES teknologi kan afvises på endda meget høje testniveauer. Der kan derimod være god grund til at se nærmere på den nestede CES funktion. Den har den egenskab, at det er den mest generelle konsistente produktionsfunktion, hvor translogfunktionen kan approksimere en vilkårlig funktion, men altså har et afgrænset konsistensområde. Der tages udgangspunkt i en nestet 3 niveau 4 faktor CES funktion.

Udledningen af de langsigtede faktorefterspørgselsfunktioner og tilsvarende omkostningsfunktioner og prisindeks er velkendt fra litteraturen. Tingene bliver lidt mere komplicerede end i de ikke nestede tilfælde. Udledningen af de kortsigtede faktorefterspørgselsfunktioner, dvs. betinget på kapitalapparatet, er derimod noget mere kompliceret: De optimale kortsigtsfaktorefterspørgsler kan således ikke udledes eksplicit som funktioner af kapitalapparat og relevante faktorpriser, og der svarer således ikke en CES kortsigtsomkostningsfunktion til omkostningsminimeringsproblemet givet kapitalapparatet. Det er formodentlig derfor forfatteren ikke er stødt på kortsigtsomkostningsfunktioner baseret på CES i litteraturen. Der foreslås alligevel en forholdsvis simpel hjemmestrikket estimationsmetode, hvor denne fundamentale ikke-linearitet "parkeres" i et lidt kompliceret marginalomkostningsudtryk; men hvor estimationsproblemet iøvrigt er helt parallelt med langsigtstilfældet.

c:\tekst\ces_1.pbr

Nøgleord: produktionsfunktioner, faktorsubstitution, faktorefterspørgsel.

1. En 3 niveau 4 faktor nestet CES produktionsfunktion.

Med de 4 produktionsfaktorer, kapital, arbejdskraft, energi og materialer, hhv. *K, L, E* og *M*, vil man typisk opskrive den nestede 3 niveau CES produktion enten som en KLEM eller en KELM funktion. Dvs. man er enige om, at materialer placeres i den ydre nest, således at der er separabilitet mellem materialer og de øvrige produktionsfaktorer. Derimod er der en del usikkerhed mht., hvordan nestningen af *K, L* og *E* skal foretages. Der er 3 muligheder, og der anvendes typisk enten nestningen *KL,E* eller *KE,L*. Det er altså spørgsmålet, om det, forudsat der er separabilitet på dette niveau, er *KL* eller *KE*, der aggregeres i den inderste nest. Separabilitetsantagelser bør naturligvis testes og ikke postuleres. Dette gøres efter min mening mest korrekt i en fleksibel funktionsform, eksempelvis translogfunktionen, som er blevet beskrevet tidligere. Begrundelsen for at teste separabilitet i en fleksibel funktion er, at man ikke kommer til at lægge tilfældige uoverlagte restriktioner ned over systemet man tester i, sådan som det kan ses i visse anvendelser. Under gennemgangen af separabilitetstests i 2. generationsmodeller baseret på translogomkostningsfunktionen fandt vi for fremstillingserhverv, at givet man separerer materialer ud i den yderste nest, kan man ikke afvise, at energi kan separeres ud i næstyderste nest, mens man kan afvise, at arbejdskraft kan separeres ud på dette niveau. Konklusionerne var ikke så klare for serviceerhvervene. I det følgende gennemgås KLEM funktionen som eksempel; men det kan altså vise sig, at KELM funktioner giver en bedre databeskrivelse for visse serviceerhverv.

KLEM funktionen kan skrives:

$$Y = F(K,L,E,M,t) = A(t)\left\{\delta_{KLEM}\left[\delta_{KLE}\left(\delta_{KL}K^{-\rho_{KL}} + (1-\delta_{KL})L^{-\rho_{KL}}\right)^{\frac{\rho_{KLE}}{\rho_{KL}}} + (1-\delta_{KLE})E^{-\rho_{KLE}}\right]^{\frac{\rho_{KLEM}}{\rho_{KLE}}} + (1-\delta_{KLEM})M^{-\rho_{KLEM}}\right\}^{\frac{-\lambda}{\rho_{KLEM}}} \tag{1.1}$$

hvor λ er homogenitetsgraden og *A(t)* er udtryk for de Hicksneutrale tekniske fremskridt.

For overskuelighedens skyld indføres notationen:

$$Y_{KL} = \left[\delta_{KL}K^{-\rho_{KL}} + (1-\delta_{KL})L^{-\rho_{KL}}\right]^{-\frac{1}{\rho_{KL}}}$$

$$Y_{KLE} = \left[\delta_{KLE}Y_{KL}^{-\rho_{KLE}} + (1-\delta_{KLE})E^{-\rho_{KLE}}\right]^{-\frac{1}{\rho_{KLE}}} \tag{1.2}$$

og dermed kan *Y* skrives:

$$Y = A(t)\left[\delta_{KLEM}Y_{KLE}^{-\rho_{KLEM}} + (1-\delta_{KLEM})M^{-\rho_{KLEM}}\right]^{-\frac{\lambda}{\rho_{KLEM}}} \tag{1.3}$$

2. Langsigtsfaktorefterspørgselsfunktioner

Omkostningsminimeringsproblemet er forudsat alle faktorer er variable:

$$\text{Min } uK + wL + P_E E + P_M M$$
$$\text{under bibetingelse af } \quad Y = F(K,L,E,M,t)$$

mht. K,L,E og M. Dvs. vi har lagrangeproblemet:

$$\text{Min. } \mathcal{L}\left(K,L,E,M \mid u,w,P_E,P_M,t,\mu\right) = uK + wL + P_E E + P_M M + \mu\left(Y - F(K,L,E,M,t)\right)$$

hvor μ er lagrangemultiplikatoren.

Pga. separabilitetsegenskaberne kan vi løse omkostningsminimeringsproblemet rekursivt som følger. Først findes det optimale forhold mellem K og L, og derefter kan vi finde de optimale niveauer for K og L givet niveauet for aggregatet Y_{KL}. I næste trin findes det optimale forhold mellem Y_{KL} og E samt de optimale niveauer for disse givet niveauet for Y_{KLE}. Endelig i sidste trin findes det optimale forhold mellem Y_{KLE} og M samt det optimale niveau for disse givet niveauet for Y. De endelige faktorefterspørgselsfunktioner fås afslutningsvis ved at indsubstituere de aggregater, der blev betinget på i første omgang.

Førsteordensbetingelserne for K og L er:

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial K} = 0 \quad \Rightarrow \quad u = \mu \frac{\partial Y}{\partial K}$$
$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial L} = 0 \quad \Rightarrow \quad w = \mu \frac{\partial Y}{\partial L}$$

og marginalprodukterne af de to faktorer er:

$$\frac{\partial Y}{\partial K} = -\frac{\lambda}{\rho_{KLEM}} A(t)\left(\frac{Y}{A(t)}\right)^{\frac{\lambda+\rho_{KLEM}}{\lambda}} \frac{\rho_{KLEM}}{\rho_{KLE}} \delta_{KLEM} Y_{KLE}^{(\rho_{KLE}-\rho_{KLEM})} \frac{\rho_{KLE}}{\rho_{KL}} \delta_{KLE} Y_{KL}^{(\rho_{KL}-\rho_{KLE})} * (-\rho_{KL})\delta_{KL} K^{-(1+\rho_{KL})}$$

$$\frac{\partial Y}{\partial L} = -\frac{\lambda}{\rho_{KLEM}} A(t)\left(\frac{Y}{A(t)}\right)^{\frac{\lambda+\rho_{KLEM}}{\lambda}} \frac{\rho_{KLEM}}{\rho_{KLE}} \delta_{KLEM} Y_{KLE}^{(\rho_{KLE}-\rho_{KLEM})} \frac{\rho_{KLE}}{\rho_{KL}} \delta_{KLE} Y_{KL}^{(\rho_{KL}-\rho_{KLE})} * (-\rho_{KL})(1-\delta_{KL}) L^{-(1+\rho_{KL})}$$

hvilket implicerer:

$$\frac{u}{w} = \frac{\delta_{KL}}{1-\delta_{KL}}\left(\frac{K}{L}\right)^{-(1+\rho_{KL})}$$
$$\Downarrow$$
$$\frac{K}{L} = \left(\frac{\delta_{KL}}{1-\delta_{KL}}\right)^{\sigma_{KL}}\left(\frac{u}{w}\right)^{-\sigma_{KL}} \tag{2.1}$$

hvor

$$\sigma_{KL} \equiv \frac{1}{1+\rho_{KL}}$$

er substitutionselasticiteten mellem K og L, givet værdien af aggregatet Y_{KL}, jf. nedenfor.[1]

Indsættes fx

$$K = L\left(\frac{\delta_{KL}}{1-\delta_{KL}}\right)^{\sigma_{KL}}\left(\frac{u}{w}\right)^{-\sigma_{KL}}$$

i udtrkket for Y_{KL} fås:

$$L^{*} = Y_{KL}(1-\delta_{KL})^{\frac{\sigma_{KL}}{1-\sigma_{KL}}}\left[\left(\frac{u}{w}\right)^{(1-\sigma_{KL})}\left(\frac{\delta_{KL}}{1-\delta_{KL}}\right)^{\sigma_{KL}} + 1\right]^{\frac{\sigma_{KL}}{1-\sigma_{KL}}}$$

tilsvarende findes K^* ved at indsubstituere i udtrykket for Y_{KL}:

$$K^{*} = Y_{KL}\delta_{KL}^{\frac{\sigma_{KL}}{1-\sigma_{KL}}}\left[\left(\frac{w}{u}\right)^{(1-\sigma_{KL})}\left(\frac{1-\delta_{KL}}{\delta_{KL}}\right)^{\sigma_{KL}} + 1\right]^{\frac{\sigma_{KL}}{1-\sigma_{KL}}}$$

Faktorefterspørgselsfunktionerne for K og L er hermed fundet, betinget på aggregatet Y_{KL}.

[1]Der glæder flg. sammenhænge, der bruges i flæng i det følgende:

$$\sigma = \frac{1}{1+\rho} \Leftrightarrow \rho = \frac{1-\sigma}{\sigma} \Rightarrow \sigma\rho = 1-\sigma = \frac{\rho}{1+\rho}$$

Omkostningerne ved at producere Y_{KL} er:

$$
\begin{aligned}
C^*_{KL} &= uK^* + wL^* \\
&= Y_{KL} u\, \delta_{KL}^{\frac{\sigma_{KL}}{1-\sigma_{KL}}} \left[\left(\frac{w}{u}\right)^{(1-\sigma_{KL})} \left(\frac{1-\delta_{KL}}{\delta_{KL}}\right)^{\sigma_{KL}} + 1 \right]^{\frac{\sigma_{KL}}{1-\sigma_{KL}}} \\
&+ Y_{KL} w (1-\delta_{KL})^{\frac{\sigma_{KL}}{1-\sigma_{KL}}} \left[\left(\frac{w}{u}\right)^{-(1-\sigma_{KL})} \left(\frac{1-\delta_{KL}}{\delta_{KL}}\right)^{-\sigma_{KL}} + 1 \right]^{\frac{\sigma_{KL}}{1-\sigma_{KL}}}
\end{aligned}
$$

som efter lidt omskrivning kan skrives:

$$
C^*_{KL} = Y_{KL} \left[\delta_{KL}^{\sigma_{KL}} u^{(1-\sigma_{KL})} + (1-\delta_{KL})^{\sigma_{KL}} w^{(1-\sigma_{KL})} \right]^{\frac{1}{1-\sigma_{KL}}}
$$

følgelig bliver prisindekset for Y_{KL}

$$
P_{KL} = \frac{C^*_{KL}}{Y_{KL}} = \left[\delta_{KL}^{\sigma_{KL}} u^{(1-\sigma_{KL})} + (1-\delta_{KL})^{\sigma_{KL}} w^{(1-\sigma_{KL})} \right]^{\frac{1}{1-\sigma_{KL}}} \qquad \textbf{(2.2)}
$$

hvilket er det velkendte CES prisindeks.

Det er vigtigt at gøre sig klart, at dette indeks også er de marginale omkostninger, der er forbundet med at øge KL-aggregatet med en enhed, når faktorforholdene hele tiden er optimale. Da der per definition er konstant skalaafkast i produktionen af aggregatet Y_{KL}, og faktorpriserne betragtes som givne og dermed uafhængige af efterspørgselsniveauet, vil de gennemsnitlige omkostninger være konstante og lig marginalomkostningerne, når samtlige faktorer forudsættes tilpasset til de optimale niveauer. Det er denne fortolkning af prisindekset, der retfærdiggør anvendelsen i det følgende.

I andet trin findes de optimale faktorefterspørgsler i næstinderste nest, dvs. Y_{KL} og E. Dette kan gøres fuldstændig ligesom i første trin, givet P_{KL}.

Det optimale forhold mellem Y_{KL} og E fås ud fra de traditionelle 1. ordensbetingelser:

$$
P_{KL} = \mu \frac{\partial Y}{\partial Y_{KL}}
$$

$$
P_E = \mu \frac{\partial Y}{\partial E}
$$

hvilket giver:

$$\frac{Y_{KL}}{E} = \left(\frac{\delta_{KLE}}{1-\delta_{KLE}}\right)^{\sigma_{KLE}} \left(\frac{P_{KL}}{P_E}\right)^{-\sigma_{KLE}}$$

Indsættes i udtrykket for Y_{KLE} fås:

$$E^* = Y_{KLE}(1-\delta_{KLE})^{\frac{\sigma_{KLE}}{1-\sigma_{KLE}}} \left[\left(\frac{P_{KL}}{P_E}\right)^{(1-\sigma_{KLE})} \left(\frac{\delta_{KLE}}{1-\delta_{KLE}}\right)^{\sigma_{KLE}} + 1\right]^{\frac{\sigma_{KLE}}{1-\sigma_{KLE}}}$$

$$Y^*_{KL} = Y_{KLE}\delta_{KLE}^{\frac{\sigma_{KLE}}{1-\sigma_{KLE}}} \left[\left(\frac{P_E}{P_{KL}}\right)^{(1-\sigma_{KLE})} \left(\frac{1-\delta_{KLE}}{\delta_{KLE}}\right)^{\sigma_{KLE}} + 1\right]^{\frac{\sigma_{KLE}}{1-\sigma_{KLE}}}$$

På helt tilsvarende vis som ovenfor fås CES-prisindekset:

$$\begin{aligned} P_{KLE} &= \left[\delta_{KLE}^{\sigma_{KLE}} P_{KL}^{(1-\sigma_{KLE})} + (1-\delta_{KLE})^{\sigma_{KLE}} P_E^{(1-\sigma_{KLE})}\right]^{\frac{1}{1-\sigma_{KLE}}} \\ &= \left\{\delta_{KLE}^{\sigma_{KLE}}\left[\delta_{KL}^{\sigma_{KL}} u^{(1-\sigma_{KL})} + (1-\delta_{KL})^{\sigma_{KL}} w^{(1-\sigma_{KL})}\right]^{\frac{1-\sigma_{KLE}}{1-\sigma_{KL}}}\right. \\ &\quad \left. + (1-\delta_{KLE})^{\sigma_{KLE}} P_E^{(1-\sigma_{KLE})}\right\}^{\frac{1}{1-\sigma_{KLE}}} \end{aligned} \qquad \textbf{(2.3)}$$

Endelig findes i sidste trin det optimale forhold mellem aggregatet Y_{KLE} og M. Resultatet bliver:

$$\frac{Y_{KLE}}{M} = \left(\frac{\delta_{KLEM}}{1-\delta_{KLEM}}\right)^{\sigma_{KLEM}} \left(\frac{P_{KLE}}{P_M}\right)^{-\sigma_{KLEM}}$$

og niveauerne findes fra produktionsfunktionen givet Y:

$$M^* = Y^{\frac{1}{\lambda}} A(t)^{-\frac{1}{\lambda}} (1-\delta_{KLEM})^{\frac{\sigma_{KLEM}}{1-\sigma_{KLEM}}} \left[\left(\frac{P_{KLE}}{P_M}\right)^{(1-\sigma_{KLEM})} \left(\frac{\delta_{KLEM}}{1-\delta_{KLEM}}\right)^{\sigma_{KLEM}} + 1\right]^{\frac{\sigma_{KLEM}}{1-\sigma_{KLEM}}}$$

$$Y^*_{KLE} = Y^{\frac{1}{\lambda}} A(t)^{-\frac{1}{\lambda}} \delta_{KLEM}^{\frac{\sigma_{KLEM}}{1-\sigma_{KLEM}}} \left[\left(\frac{P_M}{P_{KLE}}\right)^{(1-\sigma_{KLEM})} \left(\frac{1-\delta_{KLEM}}{\delta_{KLEM}}\right)^{\sigma_{KLEM}} + 1\right]^{\frac{\sigma_{KLEM}}{1-\sigma_{KLEM}}}$$

Det ses let, at det samlede prisindeks for *Y* bliver:

$$P = A(t)^{-\frac{1}{\lambda}} Y^{\frac{1-\lambda}{\lambda}} \left[\delta_{KLEM}^{\sigma_{KLEM}} P_{KLE}^{(1-\sigma_{KLEM})} + (1-\delta_{KLEM})^{\sigma_{KLEM}} P_{M}^{(1-\sigma_{KLEM})} \right]^{\frac{1}{1-\sigma_{KLEM}}} \qquad \mathbf{(2.4)}$$

$$P = A(t)^{-\frac{1}{\lambda}} Y^{\frac{1-\lambda}{\lambda}} \left\{ \delta_{KLEM}^{\sigma_{KLEM}} \left[\delta_{KLE}^{\sigma_{KLE}} \left(\delta_{KL}^{\sigma_{KL}} u^{(1-\sigma_{KL})} + (1-\delta_{KL})^{\sigma_{KL}} w^{(1-\sigma_{KL})} \right)^{\frac{1-\sigma_{KLE}}{1-\sigma_{KL}}} \right. \right.$$
$$\left. \left. + (1-\delta_{KLE})^{\sigma_{KLE}} P_E^{(1-\sigma_{KLE})} \right]^{\frac{1-\sigma_{KLEM}}{1-\sigma_{KLE}}} + (1-\delta_{KLEM})^{\sigma_{KLEM}} P_M^{(1-\sigma_{KLEM})} \right\}^{\frac{1}{1-\sigma_{KLEM}}}$$

som for λ=1 igen giver det simple CES-prisindeks af priserne på produktions-faktorerne.

Systemet kan nu løses, så de langsigtede faktorefterspørgselsfunktioner fås som funktioner af produktionsværdi og relative faktorpriser. Man får estimations-ligningerne, hvor der af hensyn til overskueligheden ikke er indsubstitueret de relevante prisindeks:

$$M^* = Y^{\frac{1}{\lambda}} A(t)^{-\frac{1}{\lambda}} (1-\delta_{KLEM})^{\frac{\sigma_{KLEM}}{1-\sigma_{KLEM}}} \left[\left(\frac{P_{KLE}}{P_M} \right)^{(1-\sigma_{KLEM})} \left(\frac{\delta_{KLEM}}{1-\delta_{KLEM}} \right)^{\sigma_{KLEM}} + 1 \right]^{\frac{\sigma_{KLEM}}{1-\sigma_{KLEM}}}$$

$$E^* = Y^{\frac{1}{\lambda}} A(t)^{-\frac{1}{\lambda}} \delta_{KLEM}^{\frac{\sigma_{KLEM}}{1-\sigma_{KLEM}}} \left[\left(\frac{P_M}{P_{KLE}} \right)^{(1-\sigma_{KLEM})} \left(\frac{1-\delta_{KLEM}}{\delta_{KLEM}} \right)^{\sigma_{KLEM}} + 1 \right]^{\frac{\sigma_{KLEM}}{1-\sigma_{KLEM}}}$$
$$* (1-\delta_{KLE})^{\frac{\sigma_{KLE}}{1-\sigma_{KLE}}} \left[\left(\frac{P_{KL}}{P_E} \right)^{(1-\sigma_{KLE})} \left(\frac{\delta_{KLE}}{1-\delta_{KLE}} \right)^{\sigma_{KLE}} + 1 \right]^{\frac{\sigma_{KLE}}{1-\sigma_{KLE}}}$$

$$L^* = Y^{\frac{1}{\lambda}} A(t)^{-\frac{1}{\lambda}} \delta_{KLEM}^{\frac{\sigma_{KLEM}}{1-\sigma_{KLEM}}} \left[\left(\frac{P_M}{P_{KLE}} \right)^{(1-\sigma_{KLEM})} \left(\frac{1-\delta_{KLEM}}{\delta_{KLEM}} \right)^{\sigma_{KLEM}} + 1 \right]^{\frac{\sigma_{KLEM}}{1-\sigma_{KLEM}}}$$
$$* \ \delta_{KLE}^{\frac{\sigma_{KLE}}{1-\sigma_{KLE}}} \left[\left(\frac{P_E}{P_{KL}} \right)^{(1-\sigma_{KLE})} \left(\frac{1-\delta_{KLE}}{\delta_{KLE}} \right)^{\sigma_{KLE}} + 1 \right]^{\frac{\sigma_{KLE}}{1-\sigma_{KLE}}}$$
$$* \ (1-\delta_{KL})^{\frac{\sigma_{KL}}{1-\sigma_{KL}}} \left[\left(\frac{u}{w} \right)^{(1-\sigma_{KL})} \left(\frac{\delta_{KL}}{1-\delta_{KL}} \right)^{\sigma_{KL}} + 1 \right]^{\frac{\sigma_{KL}}{1-\sigma_{KL}}}$$

$$K^{*} = Y^{\frac{1}{\lambda}} A(t)^{-\frac{1}{\lambda}} \delta_{KLEM}^{\frac{\sigma_{KLEM}}{1-\sigma_{KLEM}}} \left[\left(\frac{P_M}{P_{KLE}} \right)^{(1-\sigma_{KLEM})} \left(\frac{1-\delta_{KLEM}}{\delta_{KLEM}} \right)^{\sigma_{KLEM}} + 1 \right]^{\frac{\sigma_{KLEM}}{1-\sigma_{KLEM}}}$$

$$* \ \delta_{KLE}^{\frac{\sigma_{KLE}}{1-\sigma_{KLE}}} \left[\left(\frac{P_E}{P_{KL}} \right)^{(1-\sigma_{KLE})} \left(\frac{1-\delta_{KLE}}{\delta_{KLE}} \right)^{\sigma_{KLE}} + 1 \right]^{\frac{\sigma_{KLE}}{1-\sigma_{KLE}}}$$

$$* \ \delta_{KL}^{\frac{\sigma_{KL}}{1-\sigma_{KL}}} \left[\left(\frac{w}{u} \right)^{(1-\sigma_{KL})} \left(\frac{1-\delta_{KL}}{\delta_{KL}} \right)^{\sigma_{KL}} + 1 \right]^{\frac{\sigma_{KL}}{1-\sigma_{KL}}}$$

3. Substitutionselasticiteter i 3 niveau KLEM eller KELM produktions-funktionen

Det kan vises, at Allen substitutionselasticiteterne for produktionsfunktionen (1.1) eller enhedsomkostningsfunktionen (2.4) er:

$$AES_{KL} = \sigma_{KLEM} + \frac{(\sigma_{KLE} - \sigma_{KLEM})}{s_{KLE}} + \frac{(\sigma_{KL} - \sigma_{KLE})}{s_{KL}}$$

$$AES_{KE} = AES_{LE} = \sigma_{KLEM} + \frac{(\sigma_{KLE} - \sigma_{KLEM})}{s_{KLE}} \tag{3.1}$$

$$AES_{KM} = AES_{LM} = AES_{EM} = \sigma_{KLEM}$$

hvor *s* betegner omkostningsandelene i optimum af de to aggregater Y_{KL} og Y_{KLE}

Det ses altså, at kun substitutionselasticiteterne mellem faktoren i den yderste nest og de øvrige faktorer er konstante. De øvrige afhænger af omkostningsandelene. Dette er netop udtryk for generaliseringen af den simple et-niveau CES-funktion.

Nestningen er selvfølgelig afgørende for det præcise udtryk for substitutions-elasticiteterne, og (3.1) er altså for eksemplet med KLEM-funktionen.

Betragtes AES_{KL}, er fortolkningen ved fx en stigning i lønnen *w* følgende: En stigende løn betyder substitution mellem *K* og *L* for givet Y_{KL}. Imidlertid er Y_{KL} ikke givet. En stigende løn betyder, at P_{KL} stiger, hvilket fører til substitution mellem Y_{KL} og *E*, således at Y_{KL} falder og *E* stiger for givet Y_{KLE}. Endelig er Y_{KLE} ikke givet; den falder grundet stigningen i prisen P_{KLE}, og K falder dermed også. Der er altså tale om modvirkende effekter på *K*, dels den umiddelbare substitution, hvorefter K skulle stige, dels de modsat rettede afledte effekter af faldet i aggregaterne Y_{KL} og Y_{KLE}. Som slutresultat af denne proces kan *K* altså være enten steget eller faldet. Hvis der er tilstrækkelig kraftig substitution *mellem* grupper i forhold til *inden for* grupper, dvs. hvis σ_{KLE} er tilstrækkelig meget større end σ_{KL} og/eller σ_{KLEM} er tilstrækkelig meget større end σ_{KLE}.

Denne forklaring afspejler den rekursive beslutningsstrategi, som den separable produktionsstruktur er udtryk for.

4. Kortsigtsfaktorefterspørgselsfunktioner

På kort sigt betragtes det eksisterende kapitalapparat som givet, og omkostningsminimeringsproblemet består derfor i at minimere omkostningerne mht. de 3 variable produktionsfaktorer:

$$\text{Min. } uK + wL + P_E E + P_M M$$
$$\text{under bibetingelse af } \quad Y = F(K,L,E,K,t) \quad \text{og } K = \bar{K}$$

mht. L,E og M. Dvs. vi har lagrangeproblemet:

$$\begin{aligned}\text{Min. } \mathcal{L}\left(L,E,M \mid u,\bar{K},w,P_E,P_M,t,\mu\right) &= u\bar{K} + wL + P_E E + P_M M \\ &+ \mu\left(Y - F(\bar{K},L,E,M,t)\right)\end{aligned}$$

Problemet er imidlertid, at vi ikke kan komme igennem dette kortsigtsomkostningsminimeringsproblem og udlede de optimale faktorefterspørgselsfunktioner på traditionel vis. Problemet bliver så kompliceret ikke-lineært, at det ikke kan løses eksplicit. Dette vil kort blive demonstreret, hvorefter der præsenteres en mulig vej ud af problemet.

De 3 nødvendige 1.-ordens betingelser er:

$$\begin{aligned} w &= \mu \frac{\partial Y}{\partial L} \\ P_E &= \mu \frac{\partial Y}{\partial E} \\ P_M &= \mu \frac{\partial Y}{\partial M} \end{aligned}$$

Indsætte de relevante marginalprodukter fås fx.:

$$\frac{w}{P_E} = \left(\frac{\delta_{KLE}}{1-\delta_{KLE}}\right) Y_{KL}^{(\rho_{KL}-\rho_{KLE})} E^{(1+\rho_{KLE})} (1-\delta_{KL}) L^{-(1+\rho_{KL})} \qquad \textbf{(4.1a)}$$

$$\frac{P_E}{P_M} = \left(\frac{\delta_{KLEM}}{1-\delta_{KLEM}}\right) Y_{KLE}^{(\rho_{KLE}-\rho_{KLEM})} M^{(1+\rho_{KLEM})} (1-\delta_{KLE}) E^{-(1+\rho_{KLE})} \qquad \textbf{(4.1b)}$$

Fra (4.1a) og (4.1b) ses ved indsættelse af Y_{KL} og Y_{KLE}, at vi *i princippet* kan løse (4.1a) for L som funktion af E givet K og den relative faktorpris. L kan derefter indsættes i (4.1b), hvor E på tilsvarende vis kan findes som funktion af M. M kan endelig findes fra selve produktionsfunktionen. *I princippet* kunne vi altså få løsningerne til omkostningsminimeringsproblemet:

$$K = \bar{K}$$
$$L = L\left(\bar{K}, \frac{w}{P_E}, E\right)$$
$$E = E^{/}\left(\bar{K}, \frac{P_E}{P_M}, L\left(\bar{K}, \frac{w}{P_E}, E\right), M\right) = E\left(\bar{K}, \frac{P_E}{P_M}, \frac{w}{P_E}, M\right)$$

og fra produktionsfunktionen:

$$Y = F(\bar{K}, L, E, M, t)$$
$$= F\left\{\bar{K}, L\left[\bar{K}, ^{/}\frac{w}{P_E}, E\left(\bar{K}, \frac{P_E}{P_M}, \frac{w}{P_E}, M\right)\right], E\left[\bar{K}, \frac{P_E}{P_M}, \frac{w}{P_E}, M\right], M, t\right\}$$

fås kortsigtsefterspørgslen for *M*. Denne løsning kan nu indsubstitueres i ovenstående udtryk for E og dette udtryk kan så igen indsættes i udtrykket for L, hvorefter systemet er endeligt løst, således at kortsigtsfaktorefterspørgslerne afhænger af produktionen, det prædeterminerede kapitalapparat samt de relative faktorpriser på de variable produktionsfaktorer:

$$M^{+} = M^{+}\left(Y, \bar{K}, \frac{P_E}{P_M}, \frac{w}{P_E}\right)$$
$$L^{+} = L^{+}\left(Y, \bar{K}, \frac{P_E}{P_M}, \frac{w}{P_E}\right)$$
$$E^{+} = E^{+}\left(Y, \bar{K}, \frac{P_E}{P_M}, \frac{w}{P_E}\right)$$

Problemet ved den skitserede metode er desværre, at de enkelte trin giver anledning til ikke-lineære udtryk af en type, der ikke kan løses analytisk. Fx det første *og simpleste* trin, hvor *L* skal findes ud fra (4.1a), kræver løsning af:

$$\left(\delta_{KL}\bar{K}^{-\rho_{KL}} + (1-\delta_{KL})L^{-\rho_{KL}}\right)L^{\frac{\rho_{KL}(1+\rho_{KL})}{\rho_{KL}-\rho_{KLE}}}$$
$$= \left(\frac{w}{P_E}\right)^{\frac{-\rho_{KL}}{\rho_{KL}-\rho_{KLE}}} E^{\frac{\rho_{KL}(1+\rho_{KLE})}{\rho_{KL}-\rho_{KLE}}} \left[\frac{\delta_{KLE}(1-\delta_{KL})}{1-\delta_{KLE}}\right]^{\frac{\rho_{KL}}{\rho_{KL}-\rho_{KLE}}}$$

dvs. man skal løse et problem af typen

$$aL^{\alpha} + bL^{\beta} + c = 0$$

hvilket ikke er muligt analytisk.

Problemet kan hensigtsmæssigt "løses" ved at "parkere" (årsagen til) ikke-lineariteten i et lidt mere kompliceret marginalomkostningsudtryk.

En måde at betragte forskellen mellem lang- og kortsigtsomkostningsminimeringsproblemet på er, at man i kortsigtsomkostningsminimeringsproblemet kun kan øge indsatsen af KL-aggregatet Y_{KL} ved at øge L. Dermed bliver marginalomkostningerne ved Y_{KL} ikke længere lig det simple CES prisindeks, sådan som det blev udledt for langsigtsomkostningsminimeringsproblemet. Man kan imidlertid let beregne det relevante marginalomkostningsbegreb, og anvende det på traditionel vis. Det viser sig måske umiddelbart en smule overraskende, at marginalomkostningsudtrykket for Y_{KLE} bliver et simpelt CES prisindeks, blot med anvendelse af det lidt kringlede marginalomkostningsudtryk for Y_{KL}. Analysen kan altså med få undtagelser gennemføres som for langsigtsfaktorefterspørgselsfunktionerne.

Marginalomkostningerne ved Y_{KL} er

$$MC_{KL} = w\frac{\partial L}{\partial Y_{KL}}$$

Da marginalproduktet af L på Y_{KL} er

$$\begin{aligned}\frac{\partial Y_{KL}}{\partial L} &= -\frac{1}{\rho_{KL}}\left[\delta_{KL}\bar{K}^{-\rho_{KL}} + (1-\delta_{KL})L^{-\rho_{KL}}\right]^{-\frac{1+\rho_{KL}}{\rho_{KL}}}(1-\delta_{KL})(-\rho_{KL})L^{-(1+\rho_{KL})} \\ &= (1-\delta_{KL})\left[\delta_{KL}\left(\frac{\bar{K}}{L}\right)^{-\rho_{KL}} + (1-\delta_{KL})\right]^{-\frac{1+\rho_{KL}}{\rho_{KL}}}\end{aligned}$$

kan marginalomkostningsudtrykket skrives:

$$MC_{KL} = w(1-\delta_{KL})^{\frac{\sigma_{KL}}{1-\sigma_{KL}}}\left[\frac{\delta_{KL}}{1-\delta_{KL}}\left(\frac{\bar{K}}{L}\right)^{-\frac{1-\sigma_{KL}}{\sigma_{KL}}} + 1\right]^{\frac{1}{1-\sigma_{KL}}} \qquad \textbf{(4.2)}$$

Det kan indses, at marginalomkostningerne er en faldende funktion af K/L-forholdet. Er substitutionselasticiteten forskellig fra 1 er det oplagt, og for substitutionselasticiteten lig 1 er vi i CD-tilfældet, hvor resultatet er let at vise.

Det kan også let indses, at marginalomkostningsudtrykket (4.2) er lig CES-prisindekset (2.2), når vi befinder os i langsigtsligevægten. Indsættes 1. ordens betingelsen (2.1) i (4.2) fås:

$$MC_{KL} = w(1-\delta_{KL})^{\frac{\sigma_{KL}}{1-\sigma_{KL}}} \left\{ \frac{\delta_{kl}}{1-\delta_{KL}} \left[\left(\frac{\delta_{kl}}{1-\delta_{KL}} \right)^{\sigma_{KL}} \left(\frac{u}{w} \right)^{-\sigma_{KL}} \right]^{-\frac{1-\sigma_{KL}}{\sigma_{KL}}} + 1 \right\}^{\frac{1}{1-\sigma_{KL}}}$$

$$= \left[\delta_{KL}^{\sigma_{KL}} u^{(1-\sigma_{KL})} + (1-\delta_{KL})^{\sigma_{KL}} w^{(1-\sigma_{KL})} \right]^{\frac{1}{1-\sigma_{KL}}} = P_{KL}$$

Givet værdien af Y_{KL} kan det nødvendige L^{+} findes:

$$L^{+} = \left[\frac{1}{1-\delta_{KL}} Y_{KL}^{-\frac{1-\sigma_{KL}}{\sigma_{KL}}} - \frac{\delta_{KL}}{1-\delta_{KL}} \bar{K}^{-\frac{1-\sigma_{KL}}{\sigma_{KL}}} \right]^{-\frac{\sigma_{KL}}{1-\sigma_{KL}}}$$

Det optimale forhold mellem Y_{KL} og E fås ud fra de traditionelle 1. ordensbetingelser:

$$MC_{KL} = \mu \frac{\partial Y}{\partial Y_{KL}}$$

$$P_E = \mu \frac{\partial Y}{\partial E}$$

hvilket giver:

$$\frac{Y_{KL}}{E} = \left(\frac{\delta_{KLE}}{1-\delta_{KLE}} \right)^{\sigma_{KLE}} \left(\frac{MC_{KL}}{P_E} \right)^{-\sigma_{KLE}}$$

Indsættes fx

$$Y_{KL} = E \left(\frac{\delta_{KLE}}{1-\delta_{KLE}} \right)^{\sigma_{KLE}} \left(\frac{MC_{KL}}{P_E} \right)^{-\sigma_{KLE}}$$

i udtrykket for Y_{KLE} fås:

$$E^{+} = Y_{KLE}(1-\delta_{KLE})^{\frac{\sigma_{KLE}}{1-\sigma_{KLE}}} \left[\left(\frac{MC_{KL}}{P_E} \right)^{(1-\sigma_{KLE})} \left(\frac{\delta_{KLE}}{1-\delta_{KLE}} \right)^{\sigma_{KLE}} + 1 \right]^{\frac{\sigma_{KLE}}{1-\sigma_{KLE}}} \qquad \textbf{(4.3a)}$$

tilsvarende findes Y_{KL}^{+}:

$$Y_{KL}^{+} = Y_{KLE} \delta_{KLE}^{\frac{\sigma_{KLE}}{1-\sigma_{KLE}}} \left[\left(\frac{P_E}{MC_{KL}} \right)^{(1-\sigma_{KLE})} \left(\frac{1-\delta_{KLE}}{\delta_{KLE}} \right)^{\sigma_{KLE}} + 1 \right]^{\frac{\sigma_{KLE}}{1-\sigma_{KLE}}} \qquad \textbf{(4.3b)}$$

Givet marginalomkostningsudtrykket er udledningen er altså fuldstændig identisk med den, der anvendes ved udledningen af langsigtsfunktionerne.

På helt tilsvarende vis findes det optimale forhold mellem Y_{KLE} og M. Marginalomkostningerne ved aggregatet Y_{KLE} er:

$$MC_{KLE} = MC_{KL}\frac{\partial Y_{KL}^{+}}{\partial Y_{KLE}} + P_E\frac{\partial E^{+}}{\partial Y_{KLE}}$$

Fra (4.3) har vi:

$$\frac{\partial E^{+}}{\partial Y_{KLE}} = (1-\delta_{KLE})^{\frac{\sigma_{KLE}}{1-\sigma_{KLE}}}\left[\left(\frac{MC_{KL}}{P_E}\right)^{(1-\sigma_{KLE})}\left(\frac{\delta_{KLE}}{1-\delta_{KLE}}\right)^{\sigma_{KLE}} + 1\right]^{\frac{\sigma_{KLE}}{1-\sigma_{KLE}}}$$

$$\frac{\partial Y_{KL}^{+}}{\partial Y_{KLE}} = \delta_{KLE}^{\frac{\sigma_{KLE}}{1-\sigma_{KLE}}}\left[\left(\frac{P_E}{MC_{KL}}\right)^{(1-\sigma_{KLE})}\left(\frac{1-\delta_{KLE}}{\delta_{KLE}}\right)^{\sigma_{KLE}} + 1\right]^{\frac{\sigma_{KLE}}{1-\sigma_{KLE}}}$$

og vi får derfor:

$$MC_{KLE} = \left[\delta_{KLE}^{\sigma_{KLE}}MC_{KL}^{(1-\sigma_{KLE})} + (1-\delta_{KLE})^{\sigma_{KLE}}P_E^{(1-\sigma_{KLE})}\right]^{\frac{1}{1-\sigma_{KLE}}}$$

hvilket er det velkendte CES-prisindeks med den forskel, at den ene "pris" er marginalomkostningsprisindekset MC_{KL}.

Det optimale forhold mellem Y_{KLE} og M bliver herefter:

$$\frac{Y_{KLE}}{M} = \left(\frac{\delta_{KLEM}}{1-\delta_{KLEM}}\right)^{\sigma_{KLEM}}\left(\frac{MC_{KLE}}{P_M}\right)^{-\sigma_{KLEM}}$$

og indsættes i den samlede produktionsfunktion, fås:

$$M^{+} = Y^{\frac{1}{\lambda}}A(t)^{-\frac{1}{\lambda}}(1-\delta_{KLEM})^{\frac{\sigma_{KLEM}}{1-\sigma_{KLEM}}}\left[\left(\frac{MC_{KLE}}{P_M}\right)^{(1-\sigma_{KLEM})}\left(\frac{\delta_{KLEM}}{1-\delta_{KLEM}}\right)^{\sigma_{KLEM}} + 1\right]^{\frac{\sigma_{KLEM}}{1-\sigma_{KLEM}}}$$

$$Y_{KLE}^{+} = Y^{\frac{1}{\lambda}}A(t)^{-\frac{1}{\lambda}}\delta_{KLEM}^{\frac{\sigma_{KLEM}}{1-\sigma_{KLEM}}}\left[\left(\frac{P_M}{MC_{KLE}}\right)^{(1-\sigma_{KLEM})}\left(\frac{1-\delta_{KLEM}}{\delta_{KLEM}}\right)^{\sigma_{KLEM}} + 1\right]^{\frac{\sigma_{KLEM}}{1-\sigma_{KLEM}}}$$

Det ses let, at de samlede marginalomkostninger bliver:

$$
\begin{aligned}
MC^{+} &= MC_{KLE}\frac{\partial Y^{+}_{KLE}}{\partial Y} + P_M \frac{\partial M^{+}}{\partial Y} \\
&= \frac{1}{\lambda}A(t)^{-\frac{1}{\lambda}}Y^{\frac{1-\lambda}{\lambda}}\left[\delta_{KLEM}^{\sigma_{KLEM}}MC_{KLE}^{(1-\sigma_{KLEM})} + (1-\delta_{KLEM})^{\sigma_{KLEM}}P_M^{(1-\sigma_{KLEM})}\right]^{\frac{1}{1-\sigma_{KLEM}}}
\end{aligned}
$$

som for λ=1 igen giver det simple CES-prisindeks af de relevante (marginale) priser på produktionsfaktorerne. Indsubstitueres successivt de relevante marginalomkostningsudtryk fås:

$$
\begin{aligned}
MC^{+} = \frac{1}{\lambda}A(t)^{-\frac{1}{\lambda}}Y^{\frac{1-\lambda}{\lambda}}\Bigg\{&\delta_{KLEM}^{\sigma_{KLEM}}\Bigg[\delta_{KLE}^{\sigma_{KLE}}w(1-\delta_{KL})^{\frac{\sigma_{KL}}{1-\sigma_{KL}}}\left(\frac{\delta_{KL}}{1-\delta_{KL}}\left(\frac{\bar{K}}{L}\right)^{-\frac{1-\sigma_{KL}}{\sigma_{KL}}} + 1\right)^{\frac{1-\sigma_{KLE}}{1-\sigma_{KL}}} \\
&+ (1-\delta_{KLE})^{\sigma_{KLE}}P_E^{(1-\sigma_{KLE})}\Bigg]^{\frac{1-\sigma_{KLEM}}{1-\sigma_{KLE}}} + (1-\delta_{KLEM})^{\sigma_{KLEM}}P_M^{(1-\sigma_{KLEM})}\Bigg\}^{\frac{1}{1-\sigma_{KLEM}}}
\end{aligned}
$$

De relevante estimationsligninger er, uden indsubstitution af marginalomkostningsudtrykkene:

$$
M^{+} = Y^{\frac{1}{\lambda}}A(t)^{-\frac{1}{\lambda}}(1-\delta_{KLEM})^{\frac{\sigma_{KLEM}}{1-\sigma_{KLEM}}}\left[\left(\frac{MC_{KLE}}{P_M}\right)^{(1-\sigma_{KLEM})}\left(\frac{\delta_{KLEM}}{1-\delta_{KLEM}}\right)^{\sigma_{KLEM}} + 1\right]^{\frac{\sigma_{KLEM}}{1-\sigma_{KLEM}}}
$$

$$
\begin{aligned}
E^{+} = {} & Y^{\frac{1}{\lambda}}A(t)^{-\frac{1}{\lambda}}\delta_{KLEM}^{\frac{\sigma_{KLEM}}{1-\sigma_{KLEM}}}\left[\left(\frac{P_M}{MC_{KLE}}\right)^{(1-\sigma_{KLEM})}\left(\frac{1-\delta_{KLEM}}{\delta_{KLEM}}\right)^{\sigma_{KLEM}} + 1\right]^{\frac{\sigma_{KLEM}}{1-\sigma_{KLEM}}} \\
& *(1-\delta_{KLE})^{\frac{\sigma_{KLE}}{1-\sigma_{KLE}}}\left[\left(\frac{MC_{KL}}{P_E}\right)^{(1-\sigma_{KLE})}\left(\frac{\delta_{KLE}}{1-\delta_{KLE}}\right)^{\sigma_{KLE}} + 1\right]^{\frac{\sigma_{KLE}}{1-\sigma_{KLE}}}
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
L^{+} = \Bigg[\frac{1}{1-\delta_{KL}}\Bigg\{&Y^{\frac{1}{\lambda}}A(t)^{-\frac{1}{\lambda}}\delta_{KLEM}^{\frac{\sigma_{KLEM}}{1-\sigma_{KLEM}}}\left[\left(\frac{P_M}{MC_{KLE}}\right)^{(1-\sigma_{KLEM})}\left(\frac{1-\delta_{KLEM}}{\delta_{KLEM}}\right)^{\sigma_{KLEM}} + 1\right]^{\frac{\sigma_{KLEM}}{1-\sigma_{KLEM}}} \\
&* \delta_{KLE}^{\frac{\sigma_{KLE}}{1-\sigma_{KLE}}}\left[\left(\frac{P_E}{MC_{KL}}\right)^{(1-\sigma_{KLE})}\left(\frac{1-\delta_{KLE}}{\delta_{KLE}}\right)^{\sigma_{KLE}} + 1\right]^{\frac{\sigma_{KLE}}{1-\sigma_{KLE}}}\Bigg\}^{-\frac{1-\sigma_{KL}}{\sigma_{KL}}} - \frac{\delta_{KL}}{1-\delta_{KL}}\bar{K}^{-\frac{1-\sigma_{KL}}{\sigma_{KL}}}\Bigg]^{-\frac{\sigma_{KL}}{1-\sigma_{KL}}}
\end{aligned}
$$

samt den partielle tilpasningsmekanisme, som udledt under den generelle gennemgang af 3. generationsmodellerne:

$$
K - K_{-1} = \alpha\left[K^{*} - K_{-1}\right]
$$

hvor K^* er udledt ud fra langsigtsoptimeringsproblemet.

Marginalomkostningsudtrykkene er:

$$MC_{KL} = w(1-\delta_{KL})^{\frac{\sigma_{KL}}{1-\sigma_{KL}}}\left[\frac{\delta_{KL}}{1-\delta_{KL}}\left(\frac{\bar{K}}{L}\right)^{-\frac{1-\sigma_{KL}}{\sigma_{KL}}} + 1\right]^{\frac{1}{1-\sigma_{KL}}}$$

$$MC_{KLE} = \left[\delta_{KLE}^{\sigma_{KLE}}MC_{KL}^{(1-\sigma_{KLE})} + (1-\delta_{KLE})^{\sigma_{KLE}}P_E^{(1-\sigma_{KLE})}\right]^{\frac{1}{1-\sigma_{KLE}}}$$

Man kan nu estimere faktorefterspørgselsfunktionerne direkte som de står i et loop, sammen med generering af MC_{KL} og MC_{KLE}. Alternativt kan marginalomkostningsudtrykkene indsubstitueres på forhånd; men dette sidste kunne tænkes at give større konvergensproblemer i det i forvejen meget ikke-lineære estimationsproblem.