Danmarks Statistik
MODELGRUPPEN

Arbejdspapir*

Per Bremer Rasmussen

8. april 1993

Dynamiske faktorefterspørgselsfunktioner: Teori og udledning af estimationsligninger på baggrund af TL-kortsigtsomkostningsfunktionen

Resumé:

Der gives en gennemgang af tredjegenerations dynamiske faktorefterspørgselsfunktioner. Tredjegenerationsmodellerne er bla. kendetegnet ved at sondre mellem variable og kvasifaste produktionsfaktorer som fx realkapital. Sidstnævnte adskiller sig fra førstnævnte ved, at der er omkostninger forbundet med tilpasningen, og det er derfor ikke optimalt at tilpasse disse øjeblikkeligt. Det helt centrale ved tredjegeneretionsmodellerne er netop, at de forklarer tilpasningsprocessen som løsningen til et dynamisk optimeringsproblem. Papiret falder i to hoveddele. Først gennemgås tredjegenerationsmodellerne generelt, egenskaberne ved kortsigtsomkostningsfunktionen beskrives, det optimale niveau for kapitalapparatet og den optimale tilpasningsmekanisme udledes. Derefter gennemgås translogkortsigtsomkostningsfunktionen (TL), og det vises, hvilke problemer, der er med at anvende denne i en tredjegenerationssammenhæng. Der gives et bud på en estimationsprocedure, og der afsluttes med kommentarer vedr. fordele og ulemper i forhold til modeller med mere ad-hoc-prægede tilpasningsmekanismer.

c:\tekst\dynfak1.pbr

Nøgleord: faktorefterspørgsel, investeringer, tilpasningsomkostninger, translogomkostningsfunktioner, produktionsfunktioner, optimal kontrolteori

1. Om dynamiske faktorefterspørgselsfunktioner generelt.

Der kan sondres mellem 3 typer af dynamisk tilpasning af faktormængderne til de optimale niveauer. Dels kan tilpasningsmekanismen være udledt eksplicit ud fra et dynamisk optimeringsproblem, hvor der er omkostninger forbundet med tilpasning af visse faktorer, eller der kan være tale om en ad-hoc tilpasnings-mekanisme. Ad-hoc tilpasningsmekanismen kan så igen være formuleret enten som samlet system af mere eller mindre avancerede tilpasningsmekanismer eller som uafhængige partielle tilpasningsmekanismer for de enkelte faktorer.

Vi har altså:

1. "First generation dynamics" - modellen, der består af uafhængige partielle ad-hoc tilpasningsmekanismer, hvor den dynamiske tilpasning af en faktor er formuleret alene som funktion af denne faktors afvigelse fra det optimale niveau. Det optimale niveau fastsættes for den pågældende faktor isoleret set, ligesom øvrige faktorers afvigelse fra deres optimale niveauer ikke spiller nogen rolle for tilpasningen. Der ses altså både på kort og langt sigt bort fra substitutionsmuligheder mellem produktionsfaktorerne.[1] Det er denne metode, der i dag ligger bag investerings- og beskæftigelsesrealtionerne i ADAM.

2. "Second generation dynamics" - modellen er kendetegnet ved en konsistent udledning af de optimale faktorefterspørgsler på baggrund af enten profitmaksimering eller omkostningsminimering. Der er dermed åbnet mulighed for faktorsubstitution på langt sigt. Kortsigtsdynamikken er derimod formuleret ad-hoc fx i form af en vektor-udgave af en partiel tilpasningsmekanisme. Ad-hoc-tilpasningsmekanismen kan formuleres mere eller mindre fleksibelt (som man nu har frihedsgrader til) fx som en kointegrationsrepræsentation af en multivariat AR-proces.

3. "Third generation dynamics" - modellen, hvor faktorefterspørgslerne såvel på kort som langt sigt og selve tilpasningshastigheden udledes ud fra et dynamisk optimeringsproblem. Den dynamiske tilpasning er forårsaget af eksplicit formulerede - typisk kvadratiske - tilpasnings-omkostninger ved tilpasning af en eller flere produktionsfaktorer. Der sondres altså mellem variable faktorer, der kontinuert tilpasses de optimale kortsigtsniveauer givet niveauet for de kvasi-faste faktorer, faktorpriserne og produktionen og kvasifaste faktorer, der tilpasses på baggrund af bla. tilpasningsomkostninger, hvilket kan formuleres som gradvis tilpasning til de optimale niveauer med endogen tilpasnings-hastighed.

---

[1] I det omfang det indbygges prisafhængighed i de enkelte faktorefterspørgselsfunktioner , bliver det samlede system af faktorefterspørgsler inkonsistent.

Umiddelbart kan man måske få det indtryk, at tredje generationsmodellerne er det ultimative mål; at disse er mere generelle end fx. anden generationsmodellerne. Det behøver ikke være tilfældet; men vil afhænge af, hvor generelt man formulerer sin tilpasningsmekanisme i anden generationsmodellerne i forhold til, hvor mange faktorer man tillader at være kvasifaste, og hvordan tilpasningsomkostningerne formuleres i tredjegenerationsmodellerne.

Det viser sig ofte i praksis, at anden generationsmodellerne beskriver data rimeligt, mens tredje generationsmodellerne ikke klarer sig gå godt, *fordi* det ofte vælges alene at arbejde med en enkelt kvasifast faktor: realkapital. Herved bliver den teoretisk set mest tilfredsstillende model overskuelig og let fortolkelig; men tilpasningsmekanismen altså en *for* simpel beskrivelse af data.

2. Tredje generations dynamiske faktorefterspørgselsfunktioner generelt.

2.1 Kort- og langsigtsomkostningsfunktionerne.

For visse produktionsfaktorer vil der være tale om ikke ubetydelige omkostninger ved at ændre omfanget af disse i produktionsprocessen. Det betyder under visse omstændigheder, at disse faktorer ikke tilpasses øjeblikkeligt til de optimale niveauer. De betegnes som kvasifaste, fordi de er faste på kort sigt; men fuldt fleksible på langt sigt. Der må derfor sondres mellem to forskelle omkostningsbegreber: De totale omkostninger *CT* og de variable omkostninger *CV,* og mellem om disse er minimeret eller ej.

Produktionsfunktion kan skrives som:

$$y = f(v,z,t)$$

hvor y er produktionen, v en vektor af n variable produktionsfaktorer, z en vektor af m kvasifaste produktionsfaktorer og t en trend, der fanger eventuelle forskellige typer af ikke indbyggede tekniske fremskridt. Forudsat f er strengt kvasikonkav, kan man finde de omkostningsminimerende mængder af samtlige produktionsfaktorer, givet y. Som gennemgået tidligere bliver disse mængder alene en funktion af samtlige (relative) faktorpriser, produktionsniveau og t. Hermed kan minimumsomkostningsfunktionen skrives som en funktion af samme variabler:

$$\begin{aligned} CT^* &= \min_{v,z}\left\{ w'v + u'z = \sum_{i=1}^{n} w_i v_i + \sum_{i=1}^{m} u_i z_i \ ; \ y \le f[v,z,t] \right\} \\ &= CT[w,u,y,t] \end{aligned}$$

hvor w og u betegner vektorerne af faktorpriser for variable hhv. kvasifaste faktorer.

Da alle produktionsfaktorer, såvel variable som kvasifaste, er forudsat tilpasset i CT^*, er denne altså *langsigtsomkostningsfunktionen*. Den repræsenterer de omkostninger en virksomhed vil producere en given produktion til, når den har afsluttet den forsinkede tilpassning af eventuelle kvasifaste produktionsfaktorer. * markerer i det følgende at de kvasifaste faktorer og dermed samtlige produktionsfaktorer, eller funktioner heraf er i langsigtsligevægt. Egenskaberne ved denne langsigtsomkostningsfunktion er gennemgået tidligere.[2]

Udover at finde de langsigtede omkostningsminimerende niveauer for samtlige produktionsfaktorer, er det nødvendigt også at finde den optimale tilpasningshastighed for de kvasifaste faktorer samt de optimale niveauer for de variable faktorer under tilpasningsprocessen.

De optimale niveauer for de variable faktorer kan findes som de niveauer, der minimerer de *variable* omkostninger, givet produktionsniveauet, niveauet for de kvasifaste faktorer, samt priserne på de variable faktorer. Denne "restricted cost function", *CV*, vil i det følgende blive betegnet kortsigtsomkostningsfunktionen, eller variabel omkostningsfunktionen, og kan formelt skrives som:

$$\begin{aligned} CV &= \min_v \left\{ w'v = \sum_{i=1}^{n} w_i v_i \ ; \ z,\ y \le f[v,z,t] \right\} \\ &= CV[w,z,y,t] \end{aligned}$$

Som det fremgår, er der ikke i *CV* taget højde for eventuelle tilpasningsomkostninger. *CV* vil da have flg. teoretiske egenskaber:

1) positiv, real, endelig og defineret for alle $y > 0$
2) ikke aftagende i y
3) ikke aftagende i w
4) ikke voksende i z
5) homogen af første grad i w
6) konkav i w
7) konveks i z

og sidst men ikke mindst, gælder Shepheards lemma:

8) $$\frac{\partial CV}{\partial w_j} = v_j$$

der betyder, at vi ud fra en given estimeret *CV* let kan finde de optimale mængder af de variable faktorer.

[2] Per Bremer Rasmussen: "Translogomkostningsfunktioner: Teoretiske egenskaber og opstilling af estimationsligninger" *Arbejdspapir fra modelgruppen*, 26. april 1992.

Der gælder naturligvis den sammenhæng mellem *CV* og *CT*, at *CV* tillagt faste omkostninger er lig *CT*, og når de kvasifaste faktorer antager deres optimale niveauer, fås:

$$CT^{*} = CV^{*} + \sum_{i=1}^{m} u_i z_i^{*} = CV\left[w, z^{*}, y, t\right] + \sum_{i=1}^{m} u_i z_i^{*}$$

Det optimale niveau for de kvasifaste faktorer kan i princippet findes ud fra 1. ordensbetingelsen:

$$\frac{\partial CT}{\partial z_i} = \frac{\partial CV}{\partial z_i} + u_i = 0 \qquad i = 1, \ldots, m \tag{2.1}$$

Fortolkningen er ligetil. $\frac{\partial CV}{\partial z_i}$ betegner skyggeværdien af den kvasifaste faktor, forstået som den reduktion i de variable omkostninger en ekstra enhed af denne ville betyde. Skyggeværdien skal i optimum være lig de ekstra omkostninger, der er ved at anvende en ekstra enhed af den kvasifaste faktor. Sagt på en anden måde: Optimum er kendetegnet ved, at en reduktion i de variable omkostninger præcis modsvares af en stigning de faste omkostninger.

Det er et problem ved en række funktionsformer for kortsigtsomkostningsfunktionen, at man ikke *analytisk* kan finde det optimale niveau for de kvasifaste faktorer. Ofte betyder de økonomisk interessante funktionsformer for *CV*, at den afledte i (1) er en ikke-lineær funktion af den kvasifaste faktor, og vi må derfor iterere os frem til løsningen af (2.1). Det bliver desværre også tilfældet både med TL-funktionen og CES-funktionen[3].

2.2 Tilpasningsmekanismen.

Ovenfor er sondringen mellem kort- og langsigtsomkostningsfunktionen blevet diskuteret og de optimale niveauer af både variable og kvasifaske produktionsfaktorer fundet. Der skal nu ses nærmere på, hvordan tilpasningen af de kvasifaste faktorer kunne tænkes at finde sted, når der tages udgangspunkt i omkostningsminimerende adfærd, med forskellige typer af tilpasningsomkostninger.

Der kan være omkostninger forbundet ved at tilpasse en produktionsfaktor som fx. realkapital enten i form af *interne* eller *eksterne* omkostninger. Interne omkostninger er omkostninger, der giver sig udslag i, at virksomheden i den

[3]Det gælder den *nestede* CES-funktion; men for den nestede CES-funktion, kan man tage udgangspunkt i en langsigtsomkostningsfunktion og finde det optimale niveau for den kvasifaste faktor fra denne, og denne størrelse kan så anvendes i tilpasningsprocessen, jf. Per Bremer Rasmussen: "Kort- og langsigtsfaktorefterspørgselsfunktioner baseret på CES-produktionsfunktionen" *Arbejdspapir fra Modelgruppen*, 8. juni 1993.

periode, hvor realkapitalen installeres (eller tages ned), flytter ressourcer fra den almindelige vareproduktion over til installationsprocessen. De interne tilpasningsomkostninger måles altså direkte i produktionsfunktionen, således at en *ændring* i kapitalapparatet alt andet lige giver sig udslag i en lavere vareproduktion. Dette kan formuleres således:

$$y = f[v, z, \dot{z}, t]$$

hvor $\dot{z} = \dfrac{\partial z}{\partial t}$, og det antages at $f_{\dot{z}_i} \le 0 \quad og\ f_{\dot{z}_i \dot{z}_i} \le 0$[4].

Herefter bliver kortsigtsomkostningsfunktionen også en funktion af ændringen i *z*:

$$CV = CV[w, z, \dot{z}, y, t]$$

hvor vi som følge af antagelserne vedr. produktionsfunktionen får:

$$CV_{\dot{z}_i} \ge 0 \quad og\ CV_{\dot{z}_i \dot{z}_i} \ge 0$$

Der kan gives mangfoldige eksempler på eksterne tilpasningsomkostninger. De kan fx. være forårsaget af ikke-fuldkommenkonkurrencemarkeder for de pågældende produktionsfaktorer, således at stigende gennemsnitsomkostninger hos producenten af disse betyder stigende tilpasningsomkostninger. Jo hurtigere tilpasningen finder sted, jo mere skal købes indenfor en enkelt periode og jo dyrere bliver det derfor. Der kan også være tale om overarbejdsbetaling i installationsperioden eller om leveringstider, som det koster penge at nedbringe. De eksterne tilpasningsomkostninger formuleres som et selvstændigt omkostningsbidrag *D* til de samlede omkostninger:

$$D = D(\dot{z}), \quad hvor\ D^{/}(\dot{z}) \ge 0 \quad og\ D^{//}(\dot{z}) \ge 0$$

Virksomhedens problem er at finde det forløb for kvasifaste og variable produktionsfaktorer, der minimerer den tilbagediskonterede værdi af de samlede omkostninger, givet forløbet for faktorpriser og produktion. Da der pr. definition ikke er tilpasningsomkostninger ved tilpasning af de variable produktionsfaktorer, kan de variable faktorers forløb beskrives som et simpelt statisk pro-

[4]En række forfattere gør supplerende antagelser om 2.-ordens afledede af f mht. $\dot{z}$. Fx. antager Lucas (1967) $\dfrac{\partial^2 f}{\partial \dot{z}^2} = 0$, og Treadway (1974) forudsætter yderligere $\dfrac{\partial^2 f}{\partial \dot{z}\, \partial z} = 0$. Som vi skal se i det følgende, er førstnævnte kvalitativt af betydning, mens sidstnævnte ikke er det. Sidstnævnte (separabilitetsantagelse) er vel iøvrigt svær at fortolke, hvis den ikke er opfyldt.

blem jf. det ovenstående, og man kan derfor blot betragte dette som løst på ethvert tidspunkt. Virksomhedens kriteriefunktion kan derfor formuleres som:[5]

$$L(0) = \int_0^\infty \left\{ CV(t) + \sum (q_i(t)\dot{z}_i(t) + D_i(\dot{z}_i(t))) \right\} e^{-rt} dt \tag{2.2}$$

hvor q_i er anskaffelsesprisen på den kvasifaste faktor og r virksomhedens diskonteringsfaktor.

Vha. partiel integration kan første led under sumtegnet i (2.2) omformuleres:[6]

$$\int_0^\infty \sum q_i(t)\dot{z}_i(t) e^{-rt} dt = \int_0^\infty r \sum q_i(t) z_i(t) e^{-rt} dt - \sum q_i(0) z_i(0) \tag{2.3}$$

og defineres:

$$I_i = \dot{z}_i + \delta_i z_i$$

hvor δ_i er den fysiske afskrivningsrate og I_i dermed kan fortolkes som bruttoinvestering i den i'te kvasifaste faktor, kan (2.2) skrives som:

$$L(0) = \int_0^\infty e^{-rt} \{ CV[w(t), z(t), I(t) - \delta z(t), y(t), t] \} e^{-rt}$$
$$+ \int_0^\infty \left\{ \sum \left[q_i(t)(r + \delta_i) z_i(t) + D_i(I_i(t) - \delta_i z_i(t)) \right] \right\} e^{-rt} dt$$

---

[5]Gennemgangen i det følgende kan betragtes som en generalisering af modellerne i Walfridson (1987), der behandler eksterne tilpasningsomkostninger, og Denny, Fuss and Wavermann (1981), der alene behandler interne tilpasningsomkostninger.

[6]Resultatet følger af:

$$\frac{d}{dx}[f(x)g(x)] = f'(x)g(x) + f(x)g'(x)$$
$$\Rightarrow \int \frac{d}{dx}[f(x)g(x)]dx = \int f'(x)g(x)dx + \int f(x)g'(x)dx = f(x)g(x)$$
$$\Rightarrow \int_0^\infty f'(x)g(x)dx = [f(x)g(x)]_0^\infty - \int_0^\infty f(x)g'(x)dx$$

sættes $g(t) = e^{-rt}$ *og* $f'(t) = \sum q_i \frac{dz}{dt}$ *fås resultatet* idet man kan se bort fra sidste led i (2.3), da det alene vedrører variabler, der er givet på beslutningstidspunktet.[7]

Minimering af kriteriefunktionen kan løses som et optimalt kontrolproblem. Hamiltonfunktionen bliver:

$$H[t, z(t), I(t), \mu(t)] =$$

$$e^{-rt}\Big\{CV[w(t), z(t), t(t) - \delta z(t), y(t), t] + \sum \big[q_i(r+\delta_i)z_i + D_i(I_i - \delta_i z_i(t))\big]\Big\}$$

$$+ \mu(t)\big[I(t) - \hat{\delta} z(t)\big]$$

hvor *μ* betegner den adjungerede funktion og ^ betegner diagonalisering af den pågældende vektor.

Af hensyn til overskueligheden i det følgende vælges at arbejde med en enkelt kvasifast faktor. Det gør notationen lettere, og det er alligevel det, der i første omgang vil blive prøvet i estimationsforsøgene. Endvidere udelades *t* som tidsindeks, hvor det ikke giver anledning til fortolkningsproblemer.

Givet de konkavitetsegenskaber der følger af, at *CV* er udledt på baggrund af en kvasikonkav produktionsfunktion, samt antagelsen om funktionsformen for *D*, er følgende 1. ordensbetingelser nødvendige og tilstrækkelige for et optimum:[8]

$$\dot{\mu} = -\frac{\partial H}{\partial z} = -e^{-rt}\big[CV_z - \delta(CV_{\dot z} + D') + q(r+\delta)\big] + \mu\delta \qquad \textbf{(2.4a)}$$

$$\frac{\partial H}{\partial I} = 0 \Rightarrow e^{-rt}\big[CV_{\dot z} + D'\big] + \mu = 0 \Rightarrow \mu = -\big[CV_{\dot z} + D'\big]e^{-rt} \qquad \textbf{(2.4b)}$$

(4b) implicerer:

$$\dot{\mu} = r\big[CV_{\dot z} + D'\big]e^{-rt} - \big[CV_{\dot z \dot z}\ddot{z} + CV_{z\dot z}\dot{z} + D''\ddot{z}\big]e^{-rt}$$

hvilket indsat i (4a) giver:

---

[7]Det er uhensigtsmæssigheder i WP, der gør, at formlen må splittes op på denne måde. WP kan ikke lave store parenteser, der går over flere linier.

[8]Både *CV* og *D* er konvekse i *z*, hvorfor *H* også er det.

$$\ddot{z}\,(D^{\prime\prime}+CV_{\dot{z}\dot{z}}) \; - \; \dot{z}\,CV_{z\dot{z}} \; + \; r\,(CV_{\dot{z}}+D^{\prime})+CV_{z}+u \; = \; 0 \tag{2.5}$$

hvor $u = q(r+\delta)$ betegner usercost i denne simple model.

(2.5) beskriver den optimale udvikling i den kvasifaste faktor over tiden som en ikke-lineær 2. ordens differentialligning i niveauet for denne faktor. Ikke-lineariteten ses ikke direkte; men koefficienterne i (2.5) er funktioner af både niveau og ændringen i *z*.

(2.5) kan naturligvis ikke løses analytisk; men der kan formuleres approksimative tilpasningsmekanismer omkring den stationære tilstand.

Den stationære tilstand er defineret ved $\ddot{z} = \dot{z} = 0$, hvorefter (5) giver:

$$- \; CV_{z}^{*} \; = \; u \; + \; r\left(CV_{\dot{z}}^{*} \; + \; D^{\prime}(0)\right) \tag{2.6}$$

Venstresiden i (2.6) er gevinsten ved at øge indsatsen af den kvasifaste faktor med en enhed i den stationære tilstand. Højresiden er omkostningerne herved, der dels består af usercost (forrentning og afskrivning af *engangs*investeringen) samt forrentningen af de *engangs*omkostninger, der er ved en ændring i den kvasifaste faktor i form af enten interne eller eksterne tilpasningsomkostninger.

Der er, som omtalt tidligere, anvendt 3 specialtilfælde af modellen i litteraturen.

1) Ingen interne tilpasningsomkostninger, hvorved (2.6) bliver:

   $$- \; CV_{z}^{*} \; = \; u \; + \; rD^{\prime}(0) \; ,$$

   der svarer til modellen anvendt i Walfridson (1987).

2) Ingen eksterne tilpasningsomkostninger, hvorved fås:

   $$- \; CV_{z}^{*} \; = \; u \; + \; rCV_{\dot{z}}^{*} \; ,$$

   der svarer til modellen anvendt af Denny, Fuss og Wavermann (1981)

3) Modellen helt uden tilpasningsomkostninger:

   $$- \; CV_{z}^{*} \; = \; u \; ,$$

   der præcis svarer til den optimalitetsbetingelse vi opstillede for de kvasifaste faktorer i afsnit 2.1, jf. (2.1).

Bemærk, at øgede tilpasningsomkostninger mindsker det optimale kapitalapparat i den stationære tilstand. De (marginale) tilpasningsomkostninger indgår på lige fod med investeringsprisen i betingelsen for det optimale kapitalapparat.

Det kan vises, at differentialligningen (2.5) i en omegn omkring z^* kan approksimeres med tilpasningsmekanismen:

$$\dot{z}(t) = \beta\left(z^*(t) - z(t)\right) \tag{2.7}$$

hvor β er en variabel "tilpasningshastighed":

$$\beta = -\frac{1}{2}\left[r - \sqrt{r^2 + \frac{4\left[CV_{zz} + rCV_{\dot{z}z}\right]}{CV_{\dot{z}\dot{z}} + D^{//}}}\right] \tag{2.8}$$

Svarende til de 3 specialtilfælde fra før fås for (2.8):

1) Ingen interne tilpasningsomkostninger:

$$\beta_1 = -\frac{1}{2}\left[r - \sqrt{r^2 + \frac{4CV_{zz}}{D^{//}}}\right]$$

2) Ingen eksterne tilpasningsomkostninger[9]:

$$\beta_2 = -\frac{1}{2}\left[r - \sqrt{r^2 + \frac{4\left[CV_{zz} + rCV_{\dot{z}z}\right]}{CV_{\dot{z}\dot{z}}}}\right]$$

3) Ingen tilpasningsomkostninger:

$$\beta \rightarrow \infty \quad for\ CV_{\dot{z}\dot{z}} \rightarrow 0 \quad og\ D^{//} \rightarrow 0$$

Det fremgår, at i en *deterministisk* verden, skal der *ændringer* i de *marginale* tilpasningsomkostninger til at forklare lagget tilpasning. Er der blot tale om marginale tilpasningsomkostninger, der er uafhængige af ændringens størrelse, vil disse konstante tilpasningsomkostninger blot indgå som et element på linie med anskaffelsesprisen, jf. (2.6) ovenfor. Tilpasningsomkostningerne vil i denne situation alene have indflydelse på det optimale niveau for de kvasifaste faktorer; men de vil ikke påvirke den optimale hastighed, hvormed man tilpasser sig til disse niveauer.

I en *stokastisk* verden vil usikkerhed alene kunne begrunde en forsinket tilpasning.

Jo mere de to typer af tilpasningsomkostninger vokser med tilpasningens størrelse, dvs. jo mere funktionerne krummer, jo dyrere bliver det at foretage store

[9]Resultatet er oprindelig udledt i Lucas (1967) for denne model, her vises også det generelle resultat for vilkårligt antal kvasifaste faktorer.

tilpasninger, og jo langsommere bliver den optimale tilpasningshastighed. Det ses specielt, at:

$$\beta \rightarrow 0^{+} \quad for\ D^{//} \rightarrow \infty \quad eller\ CV_{\dot{z}\dot{z}} \rightarrow \infty$$

Det præcise udseende af tilpasningshastigheden vil afhænge af parametrene i kortsigtsomkostningsfunktionen og i formuleringen af funktionen for de eksterne tilpasningsomkostninger. Det fremgår iøvrigt, at der ikke er væsensforskelle på de to typer af tilpasningsomkostninger, når der ses bort fra den andenordensafledede $CV_{z\dot{z}}$.

Med en eksplicit formulering af kortsigtsomkostningsfunktionen og de eksterne tilpasningsomkostninger, kan de estimationsligningerne opstilles. De vil bestå af:

- den samlede kortsigtsomkostningsfunktion

- den afledte af denne mht. de variable faktorers faktorpriser, dvs. kortsigtsefterspørgselsfunktionerne (eller omkostningsandelsfunktionerne for en TL-formulering)

- Den dynamiske tilpasningsrelation i form af en variant af (2.7)

til brug for sidstnævnte kræves en eksplicit løsning for det optimale niveau for de kvasifaste faktorer.

Ovenstående vil nu blive eksemplificeret ved anvendelse af en TL-kortsigtsomkostningsfunktion.

3. Opstilling af estimationsligninger på baggrund af TL-kortsigtsomkostningsfunktionen.

Med èn kvasifast faktor kan TL-kortsigtsomkostningsfunktionen skrives:

$$
\begin{aligned}
&\ln VC(W,z,\dot{z},y,t) \\
&= \alpha_0 + \sum \alpha_i \ln w_i + \alpha_z \ln z + \alpha_{\dot{z}} \dot{z} + \alpha_y \ln y + \alpha_t t \\
&+ \tfrac{1}{2}\sum\sum \beta_{ij} \ln w_i \ln w_j + \sum \beta_{zi} \ln w_i \ln z + \sum \beta_{\dot{z}i} \dot{z} \ln w_i \\
&+ \sum \beta_{yi} \ln w_i \ln y + \sum \beta_{ti} t \ln w_i \\
&+ \tfrac{1}{2}\sum \beta_{zz} (\ln z)^2 + \beta_{z\dot{z}} \dot{z} \ln z + \beta_{zy} \ln z \ln y + \beta_{tz} t \ln z \\
&+ \tfrac{1}{2}\beta_{\dot{z}\dot{z}} \dot{z}^2 + \beta_{\dot{z}y} \dot{z} \ln y + \beta_{\dot{z}t} \dot{z} t \\
&+ \tfrac{1}{2}\beta_{yy} (lny)^2 + \beta_{ty} t \ln y + \tfrac{1}{2}\beta_{tt} t^2
\end{aligned}
\tag{3.1}
$$

og repræsenterer en 2.-ordens taylorapproksimation i logaritmer til en vilkårlig kortsigtsomkostningsfunktion[10], hvor rækkeudviklingen er foretaget i punktet: (1,1,0,1,0). Det er valgt at lade $\dot{z}$ indgå i niveau og ikke i logaritmer, da denne kan antage både positive og negative værdier, ligesom der også vil opstå problemer med logaritmisk differentiation, når der skal evalueres i den stationære tilstand.

Fortolkningerne af krydsprodukterne med $\dot{z}$ er vanskelige, og vil derfor ikke blive forsøgt, ligesom disse også vil blive udeladt af estimationsforsøgene - i hvert fald i første omgang.

Ved Shepheards lemma får vi som bekendt omkostningsandelene:

$$
\begin{aligned}
&\frac{\partial \ln CV}{\partial \ln w_i} = \frac{v_i w_i}{CV} = s_i \\
&= \alpha_i + \sum_{j=1}^{n} \beta_{ij} \ln w_j + \beta_{zi} \ln z + \beta_{\dot{z}i} \dot{z} + \beta_{yi} \ln y + \beta_{ti} t
\end{aligned}
\tag{3.2}
$$

---

[10]Det må understreges, at *TL*-funktionen ikke har nogen "self dual". Det vil sige, at en TL-produktionsfunktion ikke har en *TL*-omkostningsfunktion som repræsenterer omkostningsminimum, hverken på kort eller langt sigt. Dette er i modsætning til de velkendte eksempler CD og CES, sidstnævnte både nestet og ikke nestet.

og man kan i princippet estimere (3.1) og (3.2) direkte som de står.

Som gennemgået i afsnit 2, vil (3.1) opfylde en række teoretiske restriktioner, hvis denne ræpræsenterer en minimumsomkostningsfunktion. Her skal blot nævnes de restriktioner, som prishomogenitet pålægger. Homogenitet af 1. grad i de variable faktorpriser implicerer:

$$
\begin{aligned}
&\sum \alpha_i = 1 \\
&\sum_i \beta_{ij} = \sum_j \beta_{ij} = 0 \quad for\ j = 1, \ldots, n \\
&\sum \beta_{zi} = 0 \\
&\sum \beta_{\dot{z}i} = 0 \\
&\sum \beta_{yi} = 0 \\
&\sum \beta_{ti} = 0
\end{aligned}
\qquad \textbf{(3.3)}
$$

Det giver en række fortolkningsmæssige fordele, hvis den bagvedliggende produktionsfunktion kan pålægges konstant skalaafkast. Konstant skalaafkast implicerer for *CV* følgende:

$$
\frac{\partial \ln CT^*}{\partial \ln y} = 1 \quad \Rightarrow \quad \frac{\partial \ln CV^*}{\partial \ln y} = 1 \qquad \textbf{(3.4)}
$$

Implikationen skyldes, at konstant skalaafkast betyder, at alle kvasifaste faktorer øges med 1 pct. når *y* øges med 1 pct. Derfor øges de faste omkostninger på langt sigt med 1 pct. Kravet til *CV* er derfor, at denne også skal øges med 1 pct. Fra (3.1) og (3.4) fås:

$$
\begin{aligned}
\frac{\partial \ln CV^*}{\partial \ln y} &= \alpha_z + \alpha_y + \sum (\beta_{zi} + \beta_{yi}) \ln w_i \\
&+ (\beta_{zz} + \beta_{zy}) \ln z + (\beta_{zy} + \beta_{yy}) \ln y \\
&+ (\beta_{tz} + \beta_{ty}) t \\
&= 1
\end{aligned}
$$

Konstant skalaafkast i rækkeudviklingspunktet kræver alene: $\alpha_z + \alpha_y = 1$, mens global konstant skalaafkast kræver:

$$\begin{aligned}
&\alpha_z + \alpha_y = 1 \\
&\beta_{zi} + \beta_{yi} = 0 \quad for\ i = 1,\dots,n \\
&\beta_{zz} + \beta_{zy} = 0 \\
&\beta_{zy} + \beta_{yy} = 0 \\
&\beta_{tz} + \beta_{ty} = 0
\end{aligned} \tag{3.5}$$

Konkavitets- og konveksitetsrestriktioner kan pålægges efter samme retningslinier somfor den langsigtede TL-omkostningsfunktion.

Pålægges homogenitet, kan omkostningsandelsfunktionerne reduceres til at alene at indeholde relative faktorpriser:

$$s_i = \alpha_i + \sum_{j=2}^{n} \beta_{ij} \ln\left(\frac{w_j}{w_1}\right) + \beta_{zi} \ln z + \beta_{\dot{z}i} \dot{z} + \beta_{yi} \ln y + \beta_{ti} t$$

og antages yderligere konstant skalaafkast, reduceres omkostningsandelen til at afhænge af "kapitalkvoten":

$$s_i = \alpha_i + \sum_{j=2}^{n} \beta_{ij} \ln\left(\frac{w_j}{w_1}\right) + \beta_{zi} \ln\left(\frac{z}{y}\right) + \beta_{\dot{z}i} \dot{z} + \beta_{yi} \ln y + \beta_{ti} t$$

Det optimale niveau for den kvasifaste faktor kan jf. (2.6) findes ved betingelsen, at skyggeværdien af den kvasifaste faktor er lig omkostningerne ved at øge indsatsen af denne:

$$- CV_z^* = u + r\left(CV_{\dot{z}}^* + D'(0)\right)$$

Fra (3.1) haves:

$$\frac{\partial \ln CV}{\partial \ln z} = \alpha_z + \sum \beta_{zi} \ln w_i + \beta_{zz} \ln z + \beta_{z\dot{z}} \dot{z} + \beta_{zy} \ln y + \beta_{tz} t$$

og

$$\frac{\partial \ln CV}{\partial \dot{z}} = \alpha_{\dot{z}} + \sum \beta_{\dot{z}i} \ln w_i + \beta_{z\dot{z}} \ln z + \beta_{\dot{z}\dot{z}} \dot{z} + \beta_{\dot{z}y} \ln y + \beta_{t\dot{z}} t$$

Der mangler nu blot en formulering af funktionen D. Den antages kvadratisk:

$$D = D(\dot{z}) = \delta_{\dot{z}} \dot{z} + \tfrac{1}{2} \delta_{\dot{z}\dot{z}} \dot{z}^2$$

De afledte er altså:

$$D^{/}(\dot{z}) = \delta_{\dot{z}} + \delta_{\dot{z}\dot{z}}\dot{z}$$
$$D^{//}(\dot{z}) = \delta_{\dot{z}\dot{z}}$$

Indsættes i betingelsen for det optimale z fås:

$$-\frac{\partial \ln CV^*}{\partial \ln z} = u + r\left(\frac{\partial \ln CV^*}{\partial \dot{z}}CV^* + \delta_{\dot{z}}\right) \qquad \textbf{(3.6)}$$

Det er klart, at (3.6) giver det optimale *z* implicit; men problemet er overordentligt ikke-lineært. *z* optræder i (3.6) både i niveau og i logaritmer via VC^*.

Problemet bliver noget simplere, hvis der ikke indgår interne tilpasningsomkostninger; men det bliver stadig ikke-lineært.

Estimationsligningerne består herefter af:

- CV-relationen (3.1)
- omkostningsandelsfunktionerne (3.2)
- tilpasningsmekanismen (2.7) (naturligvis med de afledede fra CV og D indsubstitueret)

Estimationsproceduren bliver iterativ, hvis man vil beskrive det optimale kapitalapparat ved en optimalitetsbetingelse som (3.6):

1) ligningerne (3.1) og (3.2) estimeres som et samlet system.

2) På baggrund af estimaterne findes det optimale z fra (3.6) ved en iterativ løsningsprocedure.

3) relation (2.7) estimeres nu i et samlet system sammen med (3.1) og (3.2).

4) På baggrund af estimaterne findes det optimale *z* fra (3.6) ved en iterativ løsningsprocedure.

5) 3) - 4) gentages indtil det optimale *z* ikke flytter sig væsentligt fra iteration til iteration.

Bemærk, at hvis der alene er tale om eksterne tilpasningsomkostninger, indeholder den dynamiske tilpasningsmekanisme (2.7) ingen information om parametrene i kortsigtsomkostningsfunktionen, og man kan derfor nøjes med trinene 1) og 2) samt en simpel estimation af (2.7) afslutningsvis. Denne procedure kan naturligvis også anvendes, hvis man er villig til at betinge estimationerne i (2.7) på estimationerne af (3.1) og (3.2). Dette vil selvsagt være rimeligt, hvis man ikke tror, at tilpasningsmekanismen indeholder megen information om omkostningsfunktionens udseende, hvilket igen specielt vil være tilfældet, hvis interne tilpasningsomkostninger ikke er centrale.

Netop i udbudsprojektet, er det naturligvis ubehageligt, at estimationsproceduren under alle omstændigheder indeholder en iterativ løsning for det optimale kapitalapparat; men det giver på den anden side ikke i princippet anledning til problemer ved løsning af den samlede model.

Man kunne overveje at finde det optimale kapitalapparat på anden vis, fx fra de estimationer, der allerede er foretaget af langsigtssammenhængene. Problemet ved dette er, at man ikke længere kan sikre sig den pæne sammenhæng, der er mellem kort- og langsigtsomkostninger i ovenstående model. Man kommer til at postulere et kapitalapparat, som ikke vil opfylde de pæne optimalitatsbetingelser; men man vil alligevel undgå den type problemer, der er ved anvendelse af andengenerationsmodellerne.

Det er netop en fordel ved en konsekvent anvendelse af tredjegenerationsmodellerne, at man, hvis de pålægges de teoretiske restriktioner, der følger af systematisk omkostningsminimerende adfærd, altid vil befinde sig på produktionsfunktionen, og man vil specielt have:

$$\left.\frac{\partial CT}{\partial y}\right|_{sr} \geq \frac{\partial CT^*}{\partial y}$$

(sr="short run"), hvilket let ses:

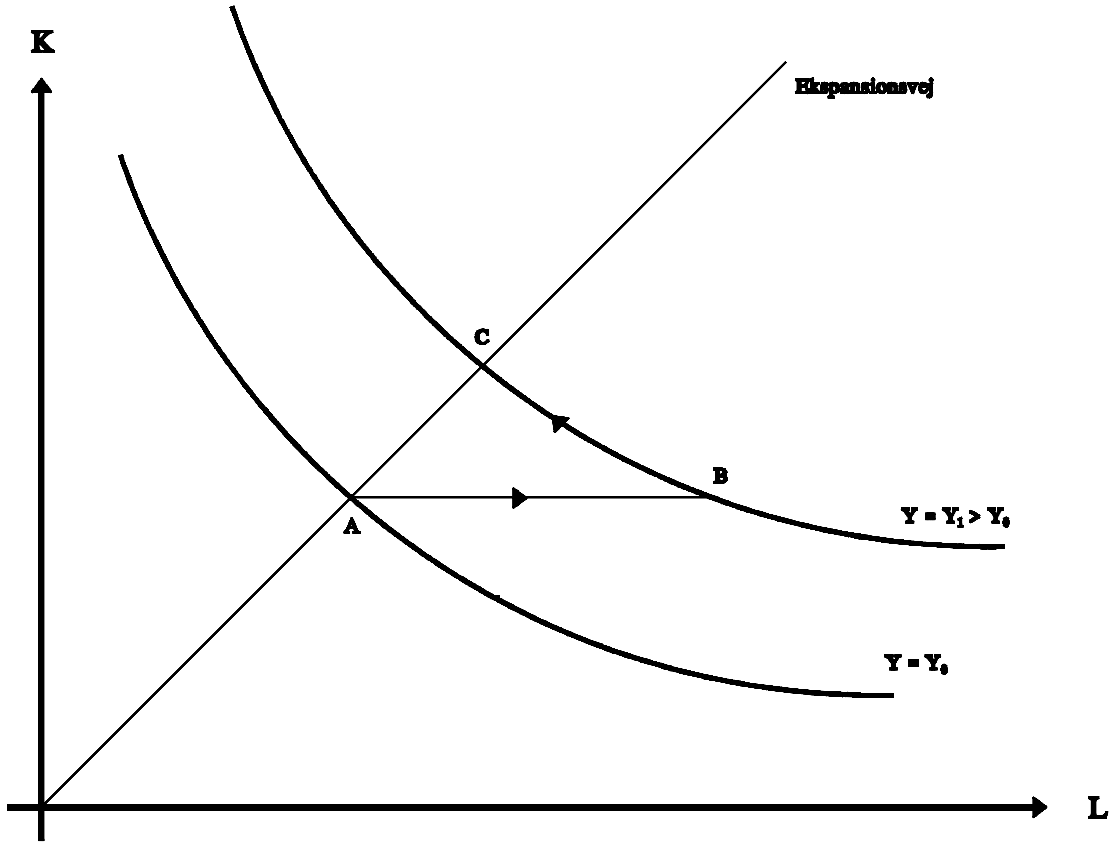
$$\left.\frac{\partial CV}{\partial y}\right|_{sr} = CV_y$$

$$\frac{\partial CV^*}{\partial y} = CV_y + CV_z\frac{\partial z^*}{\partial y} \tag{3.7}$$

da kortsigtsomkostningsfunktionen er aftagende i kapitalapparatet er sidste led i (3.7) negativt, da det optimale kapitalapparat stiger, når y stiger. At de kortsigtede omkostninger stiger mere end de langsigtede ved produktionsudvidelse, hviler altså ikke på, at det optimale kapitalapparat udledes fra (3.6). Man ville også få resultatet med et optimalt kapitalapparat udledt fra statiske estimationer af langsigtede omkostningsfunktioner.

Det kortsigtsomkostningsfunktionen sikrer er præcis, at man ved en forøgelse i y flytter op på den tilhørende isokvant; men på grund af træghed ikke øjeblikkeligt hen på ekspansionsvejen. Et for lille kapitalapparat kompenseres af øget anvendelse af faktorer, der er substitutter til kapital. Figur 3,1 illistrerer problemstillingen i tofaktortilfældet.

Figur 3.1



Denne egenskab kan blive central i andre dele af ADAM. Den kan fx. tænkes at have forklaringsbidrag i prisrelationerne og direkte i eksportligningerne. Kortsigtsomkostningerne i forhold til langsigtsomkostningerne kan siges at være et kapacitetsudnyttelsesmål.

Den ad-hoc-prægede tilpasningsmekanisme i andengenerationsmodellerne sikrer ikke på forhånd, at man under tilpasningen til det optimale kapitalapparat befinder sig enten på produktionsfunktionen (på isokvanten) eller i en ineffektiv produktion forstået som en situation, hvor de totale omkostninger på kort sigt er større end på langt sigt. Hvor man ligger afhænger netop af tilpasningsparametrene, der typisk estimeres forholdsvis frit, og det er ikke muligt at lægge de ønskede restriktioner på, med mindre man eksplicit har formuleret parametrene i langsigtsomkostningsfunktionen eller, hvilket er det samme, i produktionsfunktionen.

I et efterfølgende notat vil andengenerationsmodellerne kort blive gennemgået; men der er en hel del resultater i litteraturen, der tyder på, at man får problemer med kortsigtsomkostninger contra langsigtsomkostninger. Kigger man overfladisk på data og tænker på, hvordan de nuværende beskæftigelsesligninger ser ud, er der ikke grund til optimisme. Der er kraftige tegn på stigende profitandel i konjunkturopgange. Laborhoarding betyder øget mandeproduktivitet, der ikke sker i kraft af øget arbejdstid men i form af øget timeproduktivitet. Man må derfor forvente estimationsresultater med en ad-hoc-tilpasningsmeklanisme, hvor samtlige (eller i hvert fald de to centrale) faktorer tilpasses lagget. Hermed bliver de kortsigtede totalomkostninger *mindre* end de langsigtede. Det er samme problemstilling, som også gør sig gældende i dag for så vidt angår ADAMs beskæftigelsesrelationer.

Litteratur:

Berndt, E. R. and B. C. Fields (eds), 1981. *Modelling and Measuring Natural Resource Substitution.* MIT Press, Cambridge, Massachusetts.

Berndt, E. R. and D. M. Hesse, 1986. Measuring and assessing capacity utili zation in the manufacturing sectors of nine OECD contries. *European Economic review*, p. 961-989.

Berndt, E. R., C. J. Morrison and G. C. Watkins, 1980. Dynamic Models of Energy Denmad: An Assessment and Comparison. *UBC, Resources Paper nr. 49.*

Brown, R. S. and L. R. Christensen, 1981. *Estimating Elasticities of Substitu tion in a model of Partial Static Equilibrium: An Application to U.S. Agriculture.* Kapitel 10 i Brown and Field (1981).

Denny, M., M. Fuss and L. Waverman, 1981. *Substitution Possibilities for Energy: Evidence from US. and Canadian Manufacturing Industries.* K apitel 11 i Brown and Fiels (1981).

Lucas, R. E., 1967. Optimal Investment Policy and the Flexible Accelerator. *International Economic Review,* p. 78-85.

Walfridson, B., 1987. Dynamic models of Factor Demand: An Application to Swedish Industry. *Economiska Studier nr. 18*, Nationalekonomiske Institutionen, Handelshøgskolan vid Gøteborgs Universitet.