Danmarks Statistik
MODELGRUPPEN

Arbejdspapir [udkast]

mow

2. Februar 2005

En input-output model baseret på Laspeyres kædeindeks

Resumé:

I papiret opstilles en lille input-output model med 6 tilgang og 7 anvendelser baseret på Laspeyres kædeindeks, der som io-modellen i ADAM endogeniserer koefficienterne med henblik på at tage højde for import- og inputsubstitution.

9.WPD

Nøgleord: askd

I det følgende opstilles en lille input-output model baseret på Laspeyres kædeindeks. Formålet er at klarlægge mulighederne for at opstille en io-model baseret på fastprisstørrelser efter nationalregnskabet går over til at anvende Laspeyres kædeindeks ved offentliggørelsen af fastprisstørrelser. Indledningsvis beskrives hvilke funktion ADAMs io-system har i den samlede model. Derefter gives en fortolkning af den nuværende io-model og den nuværende io-model, der er baseret på Laspeyres fastbase indeks, derefter gives et bud på, hvordan modellen skal modificeres for at svare til den nye mængde opgørelse.

IO-modellen anvendes til at bestemme efterspørgslen efter erhvervenes produktion (mængdesammenbinding) og priserne på de endelige anvendelser (prissammenbinding), mens priserne på økonomiens tilgangskomponenter, de endelige anvendelser og importen er eksogene i forhold til io-systemet. Eksogeniseringen af importen betyder, at det er nødvendigt at endogenisere koefficienterne i systemet for at sikrer ligevægt mellem tilgang og anvendelse (importsubstitution). Som modellen er opstillet reproduceres nationalregnskabet i de historiske år.

I det følgende gennemgås første mængde-, prissammenbinding og importsubstitution i ADAM. Det vil sige tilfældet, hvor fastprisstørrelserne måles ved Laspeyres fastbaseindekst. Derefter ses på, hvordan modellen skal modificeres for at kunne reproducere nationalregnskabet, når dette baseres på Laspeyres kædeindeks. Endelig opstilles en lille io-model med 6 tilgange og 7 anvendelser med henblik på at teste opstillingen af den modificerede io-model. I appendiks er vist, at Laspeyres kædeindekset er robust overfor flertrinsaggregering, hvilket er en forudsætning for at kunne reproducere nationalregnskabet.

Papiret diskuterer ikke fordele og ulemper ved Laspeyres kædeindeks i forhold til andre aggregeringsmetoder, men det synes oplagt, at der kan være teoretiske og praktiske fordele (specielt i forbindelse med kædeindeksenes irreversibilitet) ved anvendelsen af superlative indeks fx Fischer- eller Tørnqvistindeks. Disse indeks er derimod ikke umiddelbart robuste overfor flertrinsaggregering, således at man ved anvendelse af disse kun kan reproducere nationalregnskabet med en vis fejl. Emnerne bør søges klarlagt i kommende papirer.

Den nuværende io-model, baseret på Laspeyres fastbaseindeks

Nedenfor gennemgås mængde- og prissammenbinding samt importsubstitution i den eksisterende io-model.

Mængdesammenbinding
Med Laspeyres fastbaseindeks findes, at efterspørgslen efter tilgangskomponent *i* i år *t* kan skrives:

$$f_t^i = Q_{t:0}^{LA_i} \cdot \sum_{j=1}^{J} p_0^{ij} \cdot f_0^{ij} = \frac{\sum_{j=1}^{J} p_0^{ij} \cdot f_t^{ij}}{\sum_{j=1}^{J} p_0^{ij} \cdot f_0^{ij}} \cdot \sum_{j=1}^{J} p_0^{ij} \cdot f_0^{ij} = \sum_{j=1}^{J} p_0^{ij} \cdot f_t^{ij}$$

$$= \sum_{j=1}^{J} f_t^{ij} = \sum_{j=1}^{J} \frac{f_t^{ij}}{f_t^j} \cdot f_t^j = \alpha_t^{ij} \cdot f_t^j \tag{1}$$

hvor toptegn *j* løber over anvendelserne og toptegn *i* løber over tilgangene, mens fodtegn refererer til perioden. $Q^{LA}{}_{t:0}$ er angiver væksten i Laypeyres mængdeindekset fra periode 0 til perioden *t* fjerde lighedstegn følger af, at priserne sættes lig 1 i år 0. f^{ij} er *ij* leverancen målt i fastepriser, mens p^{ij} er den tilhørende celledeflator. Mens f^i og f^j er række- henholdsvis søjlemarginaler. Io -koefficienten α_t^{ij} angiver indholdet af tilgang *i* i een enhed af anvendelse *j*.

Relationer som (1) findes eksplicit for erhvervenes produktion,mens tilsvarende relationer ikke findes for de øvrige tilgange: import, skatter og bruttoværditilvækst. Disse er dog alligevel opfyldt.

Prissammenbinding
Tilsvarende kan efterspørgslen efter anvendelseskomponent *j* findes som summen over tilgangene til anvendelsen, dvs.

$$f_t^j = Q_{t:0}^{LA_j} \cdot \sum_{i=1}^{I} p_0^{ij} f_0^{ij} = \sum_{i=1}^{I} f_t^{ij} \tag{2}$$

Relationer som (2) findes ikke i ADAM, men priserne på de endelige anvendelser bestemmes af den til mængdemodellen duale prismodel, dvs.

$$p_t^j = \frac{l_t^j}{f_t^j} = \frac{\sum_{i=1}^{I} p_t^{ij} \cdot f_t^{ij}}{f_t^j} = \sum_{i=1}^{I} \alpha_t^{ij} \cdot p_t^{ij} \tag{3}$$

Det ses af (3) at prisen på anvendelse *i* findes ved at sammenveje priserne på de tilgange anvendelsen efterspørger.

I ADAMs io-model antages dog, at hvert erhverv kun leverer een vare og, at erhvervet ikke prisdiskriminerer. Dermed skal prisen på erhvervets outpur være identiske overanvendelserne, dvs $p_t^{ij} = p_t^i$ for alle anvendelser j. Dermed fås prisrelationen

$$p_t^j = \sum_{i=1}^{I} \alpha_t^{ij} \cdot p_t^i$$

I Nrs io-tabeller er celledeflatorerne ikke identiske over anvendelserne, og prissammenbindingen giver derfor ikke NRs deflatorer for de endeligeanvendelser. Dette er i modellen håndteret ved indførelsen af kp-leddene og kkp-leddet.

De simple additive formler er, som det ses, en følge af, at der anvendes fastbase Laspeyres indeks ved sammenvejningen af mængderne.

Importsubstitution
Idet importen er eksogen i forhold til io-modellen endogeniseres io-koefficienterne med henblik på at sikre at relationer som (1) holder for importkomponenterne. Der tages udgangspunkt i io-koefficienterne i forrige periode og derefter spredes ændringer i importens markedsandel ud på importkoefficienterne. Det vil sige

$$am_t^{mj} = am_{t-1}^{mj} \cdot \frac{fMz_t^m}{fAm_t^m} \cdot \frac{fAm_{t-1}^m}{fMz_{t-1}^m} \tag{4}$$

hvor *m* løber over importgrupperne, fMz^m er den konkurrence udsatte del af import fra varegruppe *m*, mens fAm^m er markedsudtrykket for import af type *m*. Der modkorrigeres derefter i udvalgte koefficienter for inputtet af dansk produktion.

Markedsudtrykket defineres som

$$\frac{fAm_t^m}{fAm_{t-1}^m} = \left(\sum_{k=1}^{K} \alpha_{t-1}^{mk} \cdot f_{t-1}^k \cdot \frac{fV_t^{mk}}{fV_{t-1}^{mk}} + \sum_{g=1}^{G} \alpha_{t-1}^{mg} \cdot f_t^g \right) \cdot \frac{1}{fMz_{t-1}^m} \tag{5}$$

hvor *k* løber over erhvervene, mens *g* løber over de endelige anvendelser. Indsættes (4) i (1) og anvendes (5), så ses det, at identiteten (1) er opfyldt. [TEST DENNE, DET ER FORMENTLIG OGSÅ NØDVENDIGT AT INDFØRE EN MODEL FOR FV'erne OGSÅ]

Endelig bestemmes bruttoværditilvæksten residualt af produktionsværdien og anvendelsen af input.

En io-model baseret på Laspeyres kædeindeks

Målet er at opstille en io-model baseret på Laspeyres kædeindeks med samme egenskaber som den eksisterende io-model. Det vil sige, at der skal tages stilling til mængde- og prissammenbinding samt modelleringen af importsubstitution. Notationen er uændret i forhold til ovenfor, dog erindres, at faspris-, *f*, og deflatorerne, *p*, nedenfor er baseret på Laspeyreskædeindeks.

Mængdesammenbinding
I tilfældet hvor der anvendes Laspeyres kædeindeks findes, at efterspørgslen efter anvendelse *i* i år *t* kan skrives:

$$f_t^i = Q_{t:0}^{KLA} \cdot f_0^i \cdot p_0^{\,i} = Q_{t:t-1}^{LA} \cdot Q_{t-1:t-2}^{LA} \cdot \ldots \cdot Q_{1:0}^{LA} \cdot f_0^i \cdot p_{0_i} \tag{6}$$

hvor periode 0 udgiften blot giver niveauet. Umiddelbart giver (6) ikke mulighed for at opstille en niveaurelation for anvendelse *i*, som det er tilfældet, når fastbase indekset anvendes, men det findes at

$$f_t^i = Q_{t:t-1}^{LA} \cdot f_{t-1}^i = \frac{\sum_{j=1}^{J} p_{t-1}^{ij} \cdot f_t^{ij}}{\sum_{j=1}^{J} p_{t-1}^{ij} \cdot f_{t-1}^{ij}} f_{t-1}^i \Leftrightarrow$$

$$\frac{f_t^i}{f_{t-1}^i} = \frac{f_t^{i1}}{f_{t-1}^{i1}} \cdot \frac{p_{t-1}^{i1} \cdot f_{t-1}^{i1}}{\sum_{j=1}^{J} p_{t-1}^{ij} \cdot f_{t-1}^{ij}} + \ldots + \frac{f_t^{iJ}}{f_{t-1}^{iJ}} \cdot \frac{p_{t-1}^{iJ} \cdot f_{t-1}^{iJ}}{\sum_{j=1}^{J} p_{t-1}^{ij} \cdot f_{t-1}^{ij}} \tag{7}$$

eller

$$f_t^i \cdot p_{t-1}^{\,i} = f_t^{i1} \cdot p_{t-1}^{i1} + \ldots + f_t^{iJ} \cdot p_{t-1}^{iJ}$$

Relationen (7) siger, at mængdesammenbindingsrelationeren i tilfældet med kædeindeks enten kan opstilles så væksten i anvendelseskomponenterne i faste priser sammenvejes med anvendelses laggede omkostningsandel eller endnu simplere ved at summere mængderne målt i forrige periodes priser.

Tilsvarende relationer gælder for sammenvejening af anvendelserne, således at den samlede anvendelse *j* kan skrives

$$f_t^j \cdot p_{t-1}^{\,j} = f_t^{1j} \cdot p_{t-1}^{1} j + \ldots. + f_t^{Ij} \cdot p_{t-1}^{Ij} \Rightarrow$$

$$\alpha_t^{1j} \cdot \frac{p_{t-1}^{1j}}{p_{t-1}^{j}} + \ldots + \alpha_t^{Ij} \cdot \frac{p_{t-1}^{Ij}}{p_{t-1}^{j}} = 1 \tag{8}$$

I relation (8) dannes altså io-koefficienter svarende til io-koefficienterne i fastbase tilfældet, dog skal disse sammenvejes med den laggede celledeflator over anvendelsens samlede deflator. Anvendelse *j*'s efterspørgsel efter tilgang *i* kan altså skrives

$$f_t^{ij} = \alpha_t^{ij} \cdot \frac{p_{t-1}^{ij}}{p_{t-1}^{j}} \cdot f_t^j \tag{9}$$

Indsættes denne i (7) fås

$$f_t^i \cdot p_{t-1}^{\,i} = \alpha_t^{i1} \cdot \frac{p_{t-1}^{i1}}{p_{t-1}^{1}} f_t^1 \cdot p_{t-1}^{i1} + \ldots + \alpha_t^{iJ} \cdot \frac{p_{t-1}^{iJ}}{p_{t-1}^{J}} f_t^J \cdot p_{t-1}^{iJ} \tag{10}$$

hvilket i tilfældet uden prisdiskrimination giver

$$f_t^i = \alpha_t^{i1} \cdot \frac{p_{t-1}^{i1}}{p_{t-1}^{1}} f_t^1 + \ldots + \alpha_t^{iJ} \cdot \frac{p_{t-1}^{iJ}}{p_{t-1}^{J}} f_t^J \tag{11}$$

Det vil sige, at tilgangen findes ved sammenvejning af de aggregerede anvendelser, hvor vægtene er de priskorrigerede io-koefficienter.

Prissammenbinding

Det er vist i appendiks, at det prisindekset, der hører til det kædede Laspeyres mængdeindeks, er et Paaschekædeindeks. Dermed kan udviklingen i prisen på den endelige anvendelse j skrives som

$$\frac{p_t^j}{p_{t-1}^j} = \frac{\sum_{i=1}^{I} p_t^{ij} \cdot f_t^{ij}}{\sum_{i=1}^{I} p_{t-1}^{ij} \cdot f_t^{ij}} \tag{12}$$

Importsubstitution

Der vælges en praktisk tilgang til importsubstitutionsproblemet. Således tages udgangspunkt i, at (10) skal holde uanset at importen er eksogen for io-modellen, opg der opstilles en model for io-koefficienterne og importmarkedsudtrykket, der sikrer dette.

Der skal specielt tages hensyn til at priserne kan variere over eksperimenter. Dette forsøges gjort ved at antage at α^{ij} er konstante, når der ses bort fra importsubstitutionen, mens det tillades korrektionsfaktoren at variere. [TILLADES DETTE IKKE SÅ KAN MAN GANSKE VIST OPNÅ AT MODELLEN RAMMER SIG SELV; MEN KONSISITENSEN BRYDER SAMMEN; NÅR DER STØDES TIL EKSOGENE VARIABLE] Det vil sige

$$a_t^{mj} = a_{t-1}^{mj} \cdot \frac{p_{t-1}^m}{p_{t-2}^m} \cdot \frac{p_{t-2}^{mj}}{p_{t-1}^{mj}} \cdot \frac{f_t^m}{fam_t^m} \cdot \frac{fam_{t-1}^m}{f_{t-1}^m} \tag{13}$$

hvor m løber over M importgrupper. Det tilhørende markedsudtryk har formen

$$\frac{fam_t^m}{fam_{t-1}^m} = \frac{1}{p_{t-2}^m \cdot f_{t-1}^m} \cdot \sum_{j=1}^{J} \alpha_{t-1}^{mj} \cdot \frac{p_{t-2}^{mj}}{p_{t-1}^j} \cdot f_t^j \cdot p_{t-1}^{mj} \tag{14}$$

Det bemærkes, at der i (14) endnu ikke tages hensyn til, at det er materialekøbet, der driver markedet for erhvervenes vedkommende. Det ses ved at indsætte (13) og (14) i (10), at denne relationer opfyldt.

En lille io-model til illustration og aftestning

I det følgende opstilles en lille io-model med henblik på at afteste modellen opstillet i foregående afsnit. Da der endnu ikke foreligger io-matricer baseret på kædeindeks fra nationalregnskabet tages der udgangspunkt i

Pratiske rpblemstillinger

Indledningsvis gives dog nogle overvejelser om, hvordan aggregering, nulstilling og dannelsen af tidsserier af io-matricer kan dannes på baggrund af det forventede input for nationalregnskabet.

Aggregering til ADAM-grupperinger

Som mikrodata for ADAMs io-tabeller anvendes Nrs io-tabeller. (Idet følgende tages der udgangspunkt i fiobkr_t og iobkr_t, der de senere år har haft dimensionen 669x508. I praksis skal der formentlig også tages stilling til aggregeringen i de grundmatricer fra NR, der anvendes til at danne fiobkr_t og iobkr_t, men her må aggregeringsformlerne kunne genbruges.)

Fremover modtages grundmatricer fra NR i løbende priser ($p_t \cdot q_t$), i mængder med fast prisbasis ($p_0 \cdot q_t$) og som dette års mængder målt i forrige års priser ($p_{t-1} \cdot q_t$). Der refereres i det følgende til disse matricer som iob_t, $fiob_t$ henholdsvis $siob_t$. Idet grundmatricerne fra NR ikke repræsenterer Nrs mikrodata vil der generelt være forskel på udviklingen i pris-mængdesplittet i $fiob_t$ og $siob_t$ matricerne. Til kædning af io-cellerne på ADAM-niveau bør derfor anvendes $siob_t$-matricerne sammen med matricerne i løbende priser.

Løbende priser

ADAMs io-tabeller i løbende priser, ioa_t kan som sædvaligt dannes ved at summere over de relevante celler i iob_t-matricerne.

Kædeindeks[1]

---

[1]Som mål for mængdeudviklingen anvendes Laspeyreskæder på celleniveau. Mængdeudviklingen mellem periode *t-1* og *t* over *n*-goder opgøres i Laspeyres-indekset som

$$Q^{LA}_{t:t-1} = \frac{\sum_{i=1}^{n} p^i_{t-1} \cdot q^i_t}{\sum_{i=1}^{n} p^i_{t-1} \cdot q^i_{t-1}}$$

Mens mængdeudvikling fra periode t = 0 til T findes som en multiplikationskæde af Laspeyres indeks over en periode

$$Q^{KLA}_{T:0} = Q^{LA}_{T:T-1} \cdot \ldots\ldots \cdot Q^{LA}_{1:0}$$

Niveauet for mængden er arbitrært og kan fx fastlægges ved at sætte prisen på aggregatet til 1 i perioden t=0. (Det er ikke anderledes end i de nuværende fastbaseindeks.), således at mængden i år T er

$$f_T = Q^{KLA}_{T:0} \cdot \sum_{i=1}^{n} p^i_0 \cdot q^i_0$$

Der er i princippet intet problem i at skifte aggregator, men Laspeyres er behageligt til en start idet, Første trin i at danne io-matricer på ADAMs aggregeringsniveau med mængdeudviklingen målt ved Laspeyreskædeindekse er at aggregere $siob_t$-matricerne til ADAM-niveau. Dette kan gøres ved at summere over de relevante celler i $siob_t$-matricen.

Givet ioa_t- og $sioa_t$-matricerne kan der dannes mængde-matricer på baggrund af Laspeyreskæder som

$$kioa_T = (sioa_T./ioa_{T-1}).*....\ .*(sioa_1./ioa_0).*ioa_0$$

hvor ./ og .* betegner henholdsvis elementvis division og elementvis multiplikation af matricerne. Bemærk iøvrigt, at idet

$$kioa_{T-1} = (sioa_{T-1}./ioa_{T-2}).*....\ .*(sioa_1./ioa_0).*ioa_0$$

så er

$$kioa_T = (sioa_T./ioa_{T-1}).*kioa_{T-1}$$

Lidt uddybende kan man specificere indholdet i celle *nk* i $kioa_T$-matricen. Antag, at *nk*-cellen i *kioa*-matricerne er dannet udfra de første *I* tilgange og de første *J* anvendelser i de detaljerede matricer. Celle *nk* i $kioa_T$-matricen vil da have indholdet

$$fk_T^{nk} = \frac{\sum_{i=1}^{I}\sum_{j=1}^{J} p_{T-1}^{ij}\cdot q_T^{ij}}{\sum_{i=1}^{I}\sum_{j=1}^{J} p_{T-1}^{ij}\cdot q_{T-1}^{ij}}\cdot\ldots\cdot\frac{\sum_{i=1}^{I}\sum_{j=1}^{J} p_0^{ij}\cdot q_1^{ij}}{\sum_{i=1}^{I}\sum_{j=1}^{J} p_0^{ij}\cdot q_0^{ij}}\cdot\sum_{i=1}^{I}\sum_{j=1}^{J} p_0^{ij}\cdot q_0^{ij}$$

Den opmærksomme læser bemærker, at det sidste led går ud med tælleren i næstsidste led. Dette afspejler, at kædeindekset fra periode *t*-1 til *t* er identisk med fastbaseindekset således at mængden i periode *t* i forhold til periode *t*-1 blot er perioden mængde målt i foregående periodes priser.

Nulstilling

Problem - dette må kræve omskrivning af RAS-proceduren? Dette vil generere *ion* og *kion* matricer.

io-modellen i ADAM

Givet *ion*- og *kion*-matricerne kan der opstilles en io-model til ADAM baseret på kædeindekserede fastprismatricer. Der er tre områder,der skal tages stilling til

1) Mængdesammenbinding

---

det er robust overfor flertrinsaggregering, og det derfor er lettere at tjekke beregninger.

2) prissammenbinding
3) import- og inputsubstitution

Antag, at io-matricerne på ADAMs aggregeringsniveau har *N* tilgange og *K* anvendelser.

Når der anvendes kædeindeks til dannelsen af mængderne holder den simple aggregering, der haves i den nuværende model ikke længere. Se fx på aggregeringen af anvendelse *k*. Denne får formen

hvor u_t^{nk} er udgiftsandel for anvendelse *k* til tilgang *n*. Dvs. at væksten i anvendelse *k* bestemmes ved at sammenveje vækstraterne i anvendelse *k*'s tilgange, hvor vægtene er lagede udgiftsandele.

I ADAM løber kausaliteten den modsatte vej, idet anvendelseren er eksogene for io-modellen og væksten i anvendelse *k* derfor bestemt udenfor io-modellen. Antages det, at udgiftsandelene er konstante er det givet, at vækstene i hver af tilgangene skal være identisk med væksten i anvendelsen for, at relationen holder.

Mængde- og prissammenbinding

Definer udgiftsandelen for tilgang *i* i anvendelse *j*

$$u^{ij} = \frac{l^{ij}}{L^j}, \; hvor L^j = \sum_{j \in J} l^{ij}$$

der således søjlevis summerer til 1.

Antag, at vi kender den samlede udgift til anvendelse *j*. Dette vil så generere en udgift til anvendelse *i* på $l^{ij} = u^{ij} \cdot L^j$. Kendes envidere prisen på anvendelsen findes cellemængden som $f^{ij} = u^{ij} \cdot L^j / p^j$

Mængdesammenbinding

Efterspørgslen efter tilgang *i* bestemmes i io-modellen ved aggregering af efterspørgsler
ne, hvor aggregatoren er en Laspeyreskæde. Det vil sige[2]

---

[2]Dette fremkommer som $f_t^i = \frac{\sum_{j=1}^{J} p_{t-1}^{ij} \cdot f_t^{ij}}{\sum_{j=1}^{J} p_{t-1}^{ij} \cdot f_{t-1}^{ij}} \cdot f_{t-1}^i$

1) $$f^{i}=f_{-1}^{i}\cdot\left(\sum_{j=1}^{J}\frac{f^{ij}}{f_{-1}^{ij}}\cdot\frac{l_{-1}^{ij}}{L_{-1}^{i}}\right),\ hvor\ L_{-1}^{i}=\sum_{j=1}^{J}l_{-1}^{ij}$$

hvor f^{ij} er cellen for tilgang *i*'s leverance til anvendelse *j*, l^{ij} er udgiften til leverancen fra tilgang *i* til anvendelse *j* og L^{i} er den samlede udgift til leverancer fra tilgang *i*. Relationer som 1) findes i den samlede model kun for erhvervenes produktion.

Prissammenbinding

Prisen på de endelige anvendelser findes ved aggregering af tilgangene på anvendelserne, dvs. ved aggregering af priserne i anvendelsessøjlen. Det til det kædede Laspeyres mængdeindeks tilhørende prisindeks er et Paaschekædeindeks. Dvs at prisen på anvendelse *j* fremkommer som

$$p_{t}^{j}=\frac{\sum_{i=1}^{I}p_{t}^{ij}\cdot f_{t}^{ij}}{\sum_{i=1}^{I}p_{t-1}^{ij}\cdot f_{t}^{ij}}\cdot p_{t-1}^{j}$$

$$p_{t}^{j}=\frac{l_{t}^{j}}{f_{t}^{j}}=\sum_{i=1}^{I}p_{t}^{ij}\cdot f_{t}^{ij}\cdot\left(\frac{\sum_{i=1}^{I}p_{t-1}^{ij}\cdot f_{t-1}^{ij}}{\sum_{i=1}^{I}p_{t}^{ij}\cdot f_{t-1}^{ij}}\cdot\ldots\cdot\frac{\sum_{i=1}^{I}p_{0}^{ij}\cdot f_{0}^{ij}}{\sum_{i=1}^{I}p_{1}^{ij}\cdot f_{0}^{ij}}\right)\cdot\sum_{i=1}^{I}p_{0}^{ij}\cdot f_{0}^{ij}=p_{t:t-1}^{PA}\cdot\ldots\cdot p_{1:0}^{PA}$$

$$=p_{t.t-1}^{PA}\cdot p_{t-1}^{j}$$