Danmarks Statistik
MODELGRUPPEN

Arbejdspapir*

Karsten Theil Hansen

7. december 1993

Teknologiske fremskridt i translog- og CES-produktionsfunktionerne

Resumé:

De underliggende antagelser bag den hidtige modellering af teknologiske fremskridt i udbudsprojektet gennemgås, og det påpeges, at en sammenligning af disse fremskridt i translog og CES er vanskelig i den nuværende parametrisering. Der argumenteres for at formulerere produktionsfunktionerne i effektivitetsenheder, hvor en sammenligning af forskellige produktionsfunktioners effektivitetsindeks er mulig. Det vises, at de allerede estimerede efterspørgselsfunktioner kan omparametriseres til formuleringen i effektivitetsenheder. Effektivitetsindeksene viser sig at være nogenlunde identiske for CES og translog.

Der præsenteres yderligere nogle nye CES-estimationer, baseret på en mere generel formulering af de teknologiske fremskridt, og den nuværende specifikation sammenlignes med denne.

p:\wp\trend.kth

Nøgleord: trend teknologi udbud produktionsfunktion CES translog

Under arbejdet med udbudsprojektet, er mange spørgsmål blevet rejst i forbindelse med indførelsen af trends i de langsigtede faktorefterspørgsels-funktioner. Flere af disse spørgsmål har handlet om, hvorledes trendene i translog og CES kan fortolkes og sammenlignes. Dette vil vi kigge nærmere på i det følgende.

I det første afsnit gøres det klart, hvad der menes med at formulere en produktionsfunktions inputfaktorer i effektive enheder. Fordelene ved denne formulering fremhæves. I afsnit 2 vises det, hvorledes effektivitetsformuleringen kan bruges til at sammenligne de teknologiske fremskridt i CES og translog. Desuden sammenlignes to forskellige former for effektivitetsindeks i CES-produktionsfunktionen.

1. Om teknologiske fremskridt generelt

Antag at der er givet en produktionsfunktion

$$Y_t = F(X_{1t} , \ldots , X_{nt}) \tag{1}$$

hvor input (X_1,...,X_n) måles i fysiske enheder (såsom stk, kg, mand, kr.). Hvornår vil dette ikke være en korrekt opgørelsesmetode ? Hvis vi måler indsatsen af PC'er i stk, da vil en virksomhed et år måske bruge 100 386'ere, mens den næste år bruger 100 486'ere. Mængden af kapital har altså ikke ændret sig, men alligevel er output (formentligt) forøget.[1] Samme argument kan gives for indsatsen af arbejdskraft, som kan være konstant både i stk. og kr., men alligevel give anledning til forøget output, fx p.g.a. kurser og uddannelse. Produktionsfunktionen er med andre ord ikke konstant over tid, og dette vil resultere i ustabile estimater af parametrene i de afledte efterspørgsels-funktioner.

En måde at løse ovenstående problem på er, at opgøre alle inputs i *effektive* enheder. Der eksisterer naturligvis ikke data for effektive inputfaktorer, så vi må nøjes med at approksimere disse[2]. Produktionsfunktionen (1) skrives derfor som

$$Y_t = F(e_{1t} X_{1t} , \ldots , e_{nt} X_{nt}) = F(\tilde{X}_{1t} , \ldots , \tilde{X}_{nt}) \tag{2}$$

hvor den effektive inputmængde af X_{it} er $\tilde{X}_{it} = e_{it} X_{it}$. Her er e_{it} altså mål for, hvorledes X_{it}'s effektivitet udvikler sig. Dette var jo en nem løsning, men ikke særlig brugbar, idet e_{it} er ukendt. Effektivitetsmålet tænkes derfor at afhænge af en række eksogene faktorer, z_{it}, samt tiden, t:

[1] Bemærk at det ikke nødvendigvis vil løse problemet, hvis man måler input af PC'er i kr., idet man sagtens kan forestille sig, at prisen er konstant, mens effektiviteten stiger (386 $\rightarrow$ 486).

[2] Dette er ikke helt sandt for inputtene energi og materialer,hvor nationalregnskabets opgørelsesmetode ligner en opgørelse i effektivitetsenheder. Problemet er lidt mere udtalt for kapital, og endnu mere for arbejdskraft.

$$e_{it} = f_i(z_{it}, t) \quad , \quad i = 1,...,n \tag{3}$$

Problemet er altså nu "kogt ned" til at finde nogle relevante variabler, der kan indgå i z_{it}, samt at bestemme funktionerne f_i. Et muligt eksempel på en z-variabel kunne fx være en eller anden form for konjunkturindikator, som kunne indgår i forklaringen af effektivitetsudviklingen for arbejdskraft, hvilket ville fange fænomener som labour-hoarding.

Givet at nogle passende e_{it}'er er fundet, kan man stille sig selv spørgsmålet, hvad effektivitetsformuleringen betyder for faktorefterspørgselsfunktionerne. Vil der fx være nogen sammenhæng mellem efterspørgselsfunktionerne udledt fra hhv. (2) og (1) ?

Vi kan jo prøve at se på en to-faktor CES-produktionsfunktion

$$Y = k \left[\delta X_1^{-\frac{1-\sigma}{\sigma}} + (1-\delta) X_2^{-\frac{1-\sigma}{\sigma}} \right]^{\frac{\sigma}{1-\sigma}}$$

Faktorefterspørgselsfunktionerne bliver her

$$(X_1^* \ , \ X_2^*) = \left(\frac{Y}{k} \left(\frac{\delta_1 \ P_{12}}{P_1} \right)^{\sigma} , \ \frac{Y}{k} \left(\frac{(1-\delta_1) \ P_{12}}{P_2} \right)^{\sigma} \right) \tag{4}$$

hvor $P_{12} = \left(\delta^{\sigma} P_1^{1-\sigma} + (1-\delta)^{\sigma} P_2^{1-\sigma} \right)^{\frac{1}{1-\sigma}}$

I effektivitetsenheder har vi

$$Y = k \left[\delta (e_1 X_1)^{-\frac{1-\sigma}{\sigma}} + (1-\delta)(e_2 X_2)^{-\frac{1-\sigma}{\sigma}} \right]^{\frac{\sigma}{1-\sigma}}$$

Nu bliver faktorefterspørgselsfunktionerne

$$(X_1^* \ , \ X_2^*) = \left(\frac{1}{e_1} \frac{Y}{k} \left(\frac{\delta_1 \ \tilde{P}_{12}}{P_1 \frac{1}{e_1}} \right)^{\sigma} , \ \frac{1}{e_2} \frac{Y}{k} \left(\frac{(1-\delta_1) \ \tilde{P}_{12}}{P_2 \frac{1}{e_2}} \right)^{\sigma} \right)$$

hvor $\tilde{P}_{12} = \left(\delta^{\sigma} (P_1 \frac{1}{e_1})^{1-\sigma} + (1-\delta)^{\sigma} (P_2 \frac{1}{e_2})^{1-\sigma} \right)^{\frac{1}{1-\sigma}}$, hvilket kan skrives som

$$(\tilde{X}_1^* \ , \ \tilde{X}_2^*) = \left(\frac{Y}{k} \left(\frac{\delta_1 \ \tilde{P}_{12}}{\tilde{P}_1} \right)^{\sigma} , \ \frac{Y}{k} \left(\frac{(1-\delta_1) \ \tilde{P}_{12}}{\tilde{P}_2} \right)^{\sigma} \right) \tag{5}$$

hvor $\tilde{P}_i = P_i/e_i$ og $\tilde{X}_i = e_i X_i$.

Sammenlignes (4) og (5) ses det, at den eneste forskel på de to efterspørgselsfunktioner er, at priser og mængder er blevet skaleret med e_i-indeksene i (5). Det er kun argumenterne i efterspørgselsfunktionen, som har ændret sig, selve funktions-form og -egenskaber er ens i (4) og (5). Det er klart, at da det er nogle nye priser, som indgår i efterspørgselsfunktionerne, vil det estimerede δ og σ være forskelligt i (4) og (5), men a-priori funktionsformen er den samme.

Dette resultat gælder for en produktionsfunktion generelt. Uden effektivitetsenheder løser man

$$\min_{X_1,X_2} \; P_1X_1 + P_2X_2 \quad s.t. \quad Y = F(X_1,X_2)$$

Førsteordensbetingelserne for et minimum er

$$P_i - \mu \frac{\partial F}{\partial X_i}(X_1,X_2) = 0 \qquad , \quad i=1,2$$

Med effektivitetsenheder løses

$$\min_{X_1,X_2} \; P_1X_1 + P_2X_2 \quad s.t. \quad Y = F(e_1X_1, e_2X_2)$$

som har førsteordensbetingelserne

$$\tilde{P}_i - \mu \frac{\partial F}{\partial X_i}(\tilde{X}_1,\tilde{X}_2) = 0 \qquad , \quad i=1,2$$

Det ses, at førsteordensbetingelserne for de to problemer rent funktionelt er identiske; den eneste forskel er, at der i effektivitetsformuleringen indgår ˜ -variabler. Vi kan altid - uden konsekvens for efterspørgselsfunktionernes udseende - skalere inputfaktorerne som vi lyster, sålænge vi husker at skalere priserne modsat. Det gælder yderligere, at da efterspørgselsfunktionerne ikke ændrer form, vil omkostningsfunktionen naturligvis heller ikke ændres. Det er også her kun argumenterne i funktionen, som ændres.

En måde at anskue (og ikke mindst fordøje) ovenstående tankegang på er følgende. Lad os antage, at vi ved et guddommeligt klarsyn har set det præcise udseende af målefejlene. Vi kender med andre ord e_i'erne, så inden nogen form for estimation finder sted, begynder vi derfor med at målefejlskorrigere data. En sådan procedure er det unægteligt svært at sætte en finger på. Da vi imidlertid blot er mennesker, må vi stille os tilfreds med at prøve at *estimere* målefejlene, og det er sådan effektivitetsformuleringen skal betragtes: Vi estimerer målefejlene og korrigerer data for dem simultant.

En lidt mindre rørstrømsk uddybning, som ikke har noget med effektivitetsenheder at gøre, kan også gives. Hvis vi måler inputmængderne i mill. kr., og inputpriserne som indeks, kan vi ved at vælge e_i'erne passende, istedet måle input som indeks og priserne i mill. kr. Det er klart, at en sådan skalering ikke bør ændre faktorefterspørgselsfunktionernes grundlæggende egenskaber.

Disse egenskaber ved effektivitetsformuleringen er tiltalende. De betyder nemlig, at kender vi efterspørgselsfunktionernes udseende for en eller anden produktionsfunktion, da kan vi umiddelbart, dvs uden nogen form for algebra eller andet søvndyssende regnearbejde, opskrive efterspørgselsfunktionerne for effektivitetsformuleringen. Et eksempel kan være situationen, at efterspørgselsfunktionerne afledt fra en produktionsfunktion uden trends er kendte. Her efter kan man udstyre produktionsfunktionen med en eller anden form for trends, som kan opskrives som effektivitetsindeks, og direkte få de nye efterspørgselsfunktioner. Et andet trend-eksempel er, at hvis vi har givet nogle efterspørgselsfunktioner med trends, hvor trendene indgår på en svært fortolkelig måde, kan vi (muligvis) omskrive trendene, således at de kan gives en effektivitetsenhedsfortolkning. Dette vil vi faktisk benytte i afsnit 2.

En anden fordel ved effektivitetsformuleringen er, at man direkte kan sammenligne effektivitetsmålene, e_{it}, for *forskellige* produktionsfunktioner. Dette gøres ved at sammenligne parametrene i f_i-funktionerne for de givne produktionsfunktioner. Man kan på denne måde få en indikation af, om produktionsfunktionerne "vælger" samme effektivitetsskalering af inputs, hvilket betyder, at de teknologiske fremskridt er identiske i produktionsfunktionerne.

Yderligere må det forventes, at det i fremskrivninger er forholdsvist let at arbejde med effektivitetsformuleringen. Hvis vi opererer med fire faktorer, og $\tilde{X}_i = G(\tilde{P}_1,\tilde{P}_2,\tilde{P}_3,\tilde{P}_4,Y)$ betegner den effektive efterspørgsel efter faktor i, fås ved logaritmisk differentiation

$$\dot{X} + \dot{e} = E(\dot{P} - \dot{e}) + \iota\dot{Y}$$

hvor prikker betegner vækstrater, $\iota = (1,1,1,1)'$, **X** er en 4x1-matricen med inputfaktorer, **e** er 4x1-matricen med effektivitetsindeks, **E** er 4x4-matricen med priselasticiteter, **P** er 4x1-matricen med inputpriser, og **Y** er produktionsniveauet.

På venstresiden står vækstraten i observerede enheder plus vækstraten i effektivitetsindekset; dvs. tilsammen vækstraten i *X*'erne i effektive enheder. I parentesen på højresiden står så vækstraten i de *effektive* priser og denne ganges med matricen af priselasticiteter for at få væksten i *X*'erne i effektive enheder. Til sidst lægges vækstraten i *Y* til som følge af antagelsen om konstant skalaafkast. Det kan også skrives som:

$$\dot{X} = -\dot{e} + E(\dot{P} - \dot{e}) + \iota\dot{Y}$$

Fortolkningen af denne ligning er følgende. Hvis *e* er fyldt med lutter nuller (ingen trends overhovedet), bliver udviklingen i de observerede *X*'er blot bestemt af Y samt den faktorsubstitution, udviklingen i de observerede P'er måtte give. Hvis Y og de observerede P'er holdes konstante, bliver udviklingen i de observerede X'er bestemt som minus vækstraten i effektivitetsindeksene korrigeret for substitutionseffekter som følge af, at de effektive P'er ændres. Hvis Y holdes konstant og væksten i de observerede priser sættes lig væksten i de respektive effektivitetsindeks, bliver væksten i de observerede X'er blot lig væksten i effektivitetsindekset med modsat fortegn.

Denne sammenhæng kan dog ikke skrives bevidstløst frem, idet E er tidsafhængig (E afhænger af størrelsen af de effektive priser). Desuden vil e-vektoren også normalt afhænge af tiden (se senere i dette papir). Historisk må sammenhængen kunne bruges til en relativt smertefri dekomponering af væksten i produktionsfaktorerne i produktion, faktorpriser og trends. Man skal så bare huske at bruge de historiske effektivitetsrater og de historiske elasticiteter.

I de første 5-10 år af en fremskrivning vil ovenstående sammenhæng altså være særdeles brugbar, mens man skal passe lidt på ved længere fremskrivninger. Her vil det være nødvendigt at fremskrive selve faktorefterspørgselsfunktionerne.

2. Sammenligning af teknologiske fremskridt i translog og CES

I modelgruppepapiret *Sammenligning af 2. generations translog og CES-estimationer*, Thomas Thomsen, John Smidt, Karsten Theil Hansen, 20.november 1993, er estimationerne ikke præsenteret i effektivitetsformuleringen, og dette betyder, at en sammenligning af trends i translog og CES ikke umiddelbart er mulig, hverken i omkostnings -eller faktorefterspørgsels-"rummet". Dette indses nemmest i to-faktor-tilfældet, som vi derfor kigger nærmere på i det følgende.

De optimale omkostningsandele i to-faktor-tilfældet for translog og CES er

translog

$$\begin{aligned} s_1^* &= a + b\log\left(\frac{P_1}{P_2}\right) + b_t\, t \\ s_2^* &= 1 - a - b\log\left(\frac{P_1}{P_2}\right) - b_t\, t \end{aligned} \qquad \textbf{(6)}$$

$$s_1^* = \frac{1}{1 + \left(\frac{1-\delta}{\delta}\right)^{\sigma} \left(\frac{P_2}{P_1 e^{-\gamma_1 t}}\right)^{1-\sigma}}$$

CES **(7)**

$$s_2^* = \frac{1}{1 + \left(\frac{\delta}{1-\delta}\right)^{\sigma} \left(\frac{P_1 e^{-\gamma_1 t}}{P_2}\right)^{1-\sigma}}$$

Priserne er i første omgang ligegyldige, så vi sætter $P_1/P_2 = 1$ konstant, og får

$$s_1^* = a + b_t\, t$$

translog **(8)**

$$s_2^* = 1 - a - b_t\, t$$

$$s_1^* = \frac{1}{1 + \left(\frac{1-\delta}{\delta}\right)^{\sigma} e^{\gamma_1 (1-\sigma) t}}$$

CES **(9)**

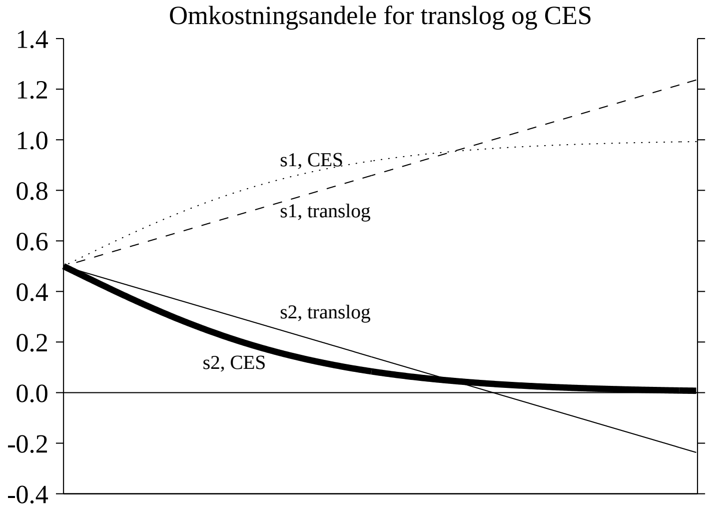
$$s_2^* = \frac{1}{1 + \left(\frac{\delta}{1-\delta}\right)^{\sigma} e^{-\gamma_1 (1-\sigma) t}}$$

Begge funktionsformer overholder (naturligvis) restriktionen om, at omkostningsandelene summer til 1. Der er imidlertid forskelle i den måde t indgår:

(1) I translog indgår t lineært, og Δs_i er konstant = b_t hhv. $-b_t$. Her kan b_t altså fortolkes som den årlige ændring i s_i. I CES indgår t ikke-lineært i et eksponentled. Hverken Δs_i eller $\Delta \log(s_i)$ er konstant i CES.

(2) For CES vil $(s_1,s_2) \rightarrow (1,0)$ eller(0,1) alt efter fortegnet på γ_1.
For translog vil (s1,s2) $\rightarrow$ $(+\infty,-\infty)$ eller $(-\infty,+\infty)$ alt efter fortegnet på b_t.

På trods af disse forskelle i fortolkningen, *kan* udviklingen i omkostningsandelene godt være nogenlunde ens (på kort og mellemlangt sigt, men altså ikke på langt sigt):



Anm: $\delta = \sigma = a = 0.5$, $\gamma_1 = 0.02$, $b_t = 0.0015$, $P_1/P_2 = 1$

Hvis vi i stedet betragter faktorefterspørgselsfunktionerne for fx faktor 1, fås

$$\textit{CES} \qquad \log(X_1^*) = (\sigma\log\delta - \log k) + \log Y - \{ (\gamma + (1-\sigma)\gamma_1)t + \gamma^* t^2 - \sigma\log[\delta^\sigma e^{-(1-\sigma)\gamma_1 t} + (1-\delta)^\sigma] \} \qquad \textbf{(10)}$$

$$\textit{translog} \qquad \log(X_1^*) = a_0 + \log Y + \{ \log(a + b_t t) + a_t t + \tfrac{1}{2}a_{tt}t^2 \} \qquad \textbf{(11)}$$

Trendene indgår i de krøllede parenteser. Det ses, at den funktionsform som trendene indgår med, simpelthen er forskellig for CES og translog. Det er ikke umiddelbart muligt i (10) og (11) at sammenligne parametrene i trendudtrykkene. Kun for $\sigma = 1$ (Cobb-Douglas) fås samme faktorefterspørgselsfunktioner[3]

$$\textit{CES} \qquad \log(X_1^*) = (\log\delta - \log k) + \log Y - \gamma t - \gamma^* t^2 \qquad \textbf{(12)}$$

$$\textit{translog} \qquad \log(X_1^*) = a_0 + \log a + \log Y + a_t t + \tfrac{1}{2}a_{tt}t^2 \qquad \textbf{(13)}$$

Vi kan altså konkludere, at når vi er i CD-tilfældet kan trendene sammenlignes, mens dette ikke ellers er muligt i ovenstående formulering.[4] Det er klart, at

[3]Her er der sat $b_t = 0$ i translog. Dette plejer man vist ikke at indregne under CD-restriktionerne i translog, men det er svært at se, hvordan en CD-produktionsfunktion er forenelig med trend i omkostningsandelene.

[4]Dette må siges at være uheldigt, idet de hidtidige estimationer tyder på, at vi er temmelig langt fra CD.

man altid kan lave "numeriske" sammenligninger, som det er gjort i TTH-/JSM/KTH op.cit, tabel 7 s.33. Det vil dog være formålstjeneligt, hvis man direkte kunne lave en sammenligning af *paramtrene* i trendene. Usammenligneligheden mellem (10) og (11) har ikke noget at gøre med, at den ene funktionsform er mere fleksibel end den anden, idet CES er fuldt fleksibel i to-faktor-tilfældet, og derved "lige så god" som translog. Forskellene opstår på grund af, at trendene indføres forskelligt i "grund-funktionerne" (for translog en omkostningsfunktion, for CES en produktionsfunktion).

Vi vil nu vise, at en sammenligning af de teknologiske fremskridt i CES og translog kan lade sig gøre, idet det er muligt, at omparametrisere de allerede estimerede efterspørgselsfunktioner til effektivitetsformuleringen.
Dette lader sig gøre, idet f_i-funktionerne i (3) er valgt overordenlig simple:

$$e_{it} = e^{\lambda_i t + \lambda^* t^2} \tag{14}$$

For både translog og CES betyder dette valg af effektivitetsmål, at man kan lave en omparametrisering af de eksisterende ligninger til effektivitets-formuleringen, således at det ikke er nødvendigt at reestimere ligningerne.

I det følgende betegner en ^ på en parameter, at parameteren er kendt (estimeret).

Omparametrisering af CES

For CES følger det direkte fra s.6-8 i TTH/JSM/KTH op.cit, at

$$\begin{aligned} \lambda_1 &= \hat{\gamma}_4 + \hat{\gamma}_3 + \hat{\gamma}_2 + \hat{\gamma}_1 \\ \lambda_2 &= \hat{\gamma}_4 + \hat{\gamma}_3 + \hat{\gamma}_2 \\ \lambda_3 &= \hat{\gamma}_4 + \hat{\gamma}_3 \\ \lambda_4 &= \hat{\gamma}_4 \\ \lambda^* &= \hat{\gamma}^* \end{aligned} \tag{15}$$

Omparametrisering af translog

For translog skal der lidt mere knofedt til. Omkostningsfunktionen (jf. formel (9) s.12 i TTH/JSM/KTH 20. november) er

$$\begin{aligned} \log C^* = {} & \hat{a}_0 + \hat{a}' \log \boldsymbol{P} + \log Y + \hat{a}_t t + \tfrac{1}{2} \log \boldsymbol{P}' \hat{\boldsymbol{B}} \log \boldsymbol{P} \\ & \hat{b}_t' \, t \log \boldsymbol{P} + \tfrac{1}{2} \hat{a}_{tt} t^2 \end{aligned} \tag{16}$$

hvor

$$a = \begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \\ (1-a_1-a_2-a_3) \end{bmatrix} , \quad b_t = \begin{bmatrix} b_{1t} \\ b_{2t} \\ b_{3t} \\ -(b_{1t}+b_{2t}+b_{3t}) \end{bmatrix} , \quad \log P = \begin{bmatrix} \log P_1 \\ \log P_2 \\ \log P_3 \\ \log P_4 \end{bmatrix}$$

$$B = \begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} & b_{13} & -(b_{11}+b_{12}+b_{13}) \\ b_{12} & b_{22} & b_{23} & -(b_{12}+b_{22}+b_{23}) \\ b_{13} & b_{23} & b_{33} & -(b_{13}+b_{23}+b_{33}) \\ -(b_{11}+b_{12}+b_{13}) & -(b_{12}+b_{22}+b_{23}) & -(b_{13}+b_{23}+b_{33}) & \sum b_{ij} \end{bmatrix}$$

Sumtegnet i B(4,4) summerer over de tre første elementer i søjle 4, som er lig de tre første elementer i række 4, idet B er symmetrisk.

Spørgsmålet er nu, om det ud fra kendskabet til parametrene i ovenstående omkostningsfunktion, er muligt at udregne λ'erne.

Ved at indføre effektivitetsvariablerne bruger man 5 nye parametre, λ_1-λ_4 og λ^*, men man mister ligeledes 5 fra den oprindelige omkostningsfunktion (11), idet a_t = a_{tt} =0 og b_t = 0 i "effektivitetsomkostningsfunktionen".

Lad $\mathbf{log\ \tilde{P}} = \mathbf{log\ P} - \lambda t - \iota\lambda^* t^2$, hvor $\lambda = (\lambda_1\ \lambda_2\ \lambda_3\ \lambda_4)$'og ι = (1 1 1 1)'.
I det følgende udnyttes det, at $\mathbf{B}\iota$ = (0 0 0 0)' og $\iota'\mathbf{B}$ = (0 0 0 0)

Man får nu brug for resultaterne fra afsnit 1.Fra disse ved vi nemlig, at omkostningsfunktionen for translog i effektivitetsformuleringen er lig omkostningsfunktionen for translog uden trends, men hvor priserne er erstattet af "~-priser", dvs

$$\log C^* = \hat{a}_0 + \hat{a}' \log\tilde{P} + \log Y + \frac{1}{2} \log\tilde{P}' \hat{B} \log\tilde{P} \qquad \textbf{(17)}$$

$\Updownarrow$

$$\begin{aligned} \log C^* &= \hat{a}_0 + \hat{a}' \log P - \hat{a}'\lambda t - \lambda^* t^2 + \log Y + \frac{1}{2} \log P' \hat{B} \log P \\ &\quad - \lambda' \hat{B}\ t \log P + \frac{1}{2}\lambda'\hat{B}\lambda\ t^2 \\ &= \hat{a}_0 + \hat{a}'\log P + \tilde{a}_t t + \log Y + \frac{1}{2} \log P' \hat{B} \log P \\ &\quad + \tilde{b}_t' t \log P + \frac{1}{2}\tilde{a}_{tt} t^2 \end{aligned} \qquad \textbf{(18)}$$

hvor

$$\begin{aligned} \tilde{a}_t &= -\hat{\boldsymbol{a}}'\lambda \\ \tilde{b}_t &= -\hat{\boldsymbol{B}}\lambda \\ \tilde{a}_{tt} &= \lambda'\hat{\boldsymbol{B}}\lambda - 2\lambda^* \end{aligned} \tag{19}$$

Ligesom i CES-tilfældet er effekten af at introducere effektivitetsenheder en reparametrisering af den oprindelige omkostningsfunktion. Sammenlignes (18) med (16) fås, at λ og λ^* skal opfylde

$$\begin{aligned} \hat{a}_t &= -\hat{\boldsymbol{a}}'\lambda \\ \hat{b}_t &= -\hat{\boldsymbol{B}}\lambda \\ \hat{a}_{tt} &= \lambda'\hat{\boldsymbol{B}}\lambda - 2\lambda^* \end{aligned} \tag{20}$$

Ud fra restriktionerne i (20) kan λ'erne bestemmes. Hvorledes dette gøres er vist i appendiks A (med mindre man er stærkt interesseret i lineær algebra kan appendikset springes over).

Fra (A8) og (A9) i appendiks A fås

$$\begin{bmatrix} \lambda_1 \\ \lambda_2 \\ \lambda_3 \\ \lambda_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} (i\bar{a}' - I_{3x3})\hat{\boldsymbol{B}}_{33}^{-1}\bar{b}_t - i\hat{a}_t \\ \\ \bar{a}'\hat{\boldsymbol{B}}_{33}^{-1}\bar{b}_t - \hat{a}_t \end{bmatrix} \tag{21}$$

$$\lambda^* = \frac{1}{2}\left[\lambda'\hat{\boldsymbol{B}}\lambda - \hat{a}_{tt}\right] \tag{22}$$

Rent funktionelt indgår λ'erne godt nok på forskellig vis i CES og translog-funktionen, men de har samme fortolkning som effektivitetsparametre og kan derfor sammenlignes. Da både translog og CES direkte kan omparametriseres til effektivitetsformuleringen, er det klart, at vi ved at bruge (16) og (17) ville få de samme værdier for λ'erne, som man ville få, hvis man reestimerede efterpørgselsfunktionerne.

I tabel 1 er effektivitetsparametrene udregnet for de tre aggregerede erhverv NX (samlet fremstilling), QX (samlet service) og XX (QX + NX).

Tabel 1. Effektivitetsparametre for 3 aggregerede sektorer

Erhverv	*XX*		*QX*		*NX*	
	TL	CES	TL	CES	TL	CES
λ_1	-0.029	-0.029	-0.045	-0.040	-0.024	-0.026
λ_2	0.008	0.006	0.001	0.002	-0.009	-0.008
λ_3	0.021	0.025	0.028	0.030	0.032	0.036
λ_4	-0.008	-0.002	-0.020	-0.015	-0.006	-0.000
λ^*	-0.0002	-0.0003	-0.0002	-0.0002	-0.0003	-0.0003

Anm. Parametrene er udregnet ud fra (21) og (22) for translog, og ud fra (15) for CES. De oprindelige parametre er estimerede på baggrund af en KELM-neststruktur. For XX og QX er det 1-trinsestimationer, mens NX-sektorens λ-parametre er udregnet på basis af en 2-trinsestimation. Trenden er lig nul i 1980, og altså negativ før 1980. For en nærmere gennemgang af neststruktur og estimationsmetoder henvises til TTH/JSM/KTH op.cit. Bemærk at λ-parametrene for XX-sektoren kan beregnes direkte ud fra estimations-resultaterne i førnævnte papir.

I tabel 1 er der en hel del information indeholdt, som kan udtrækkes på flere måder :

(1) For given sektor og λ_i kan de to *produktionsfunktioners* valg af effektivitetsparameter sammenlignes.

(2) For given sektor og produktionsfunktion kan de forskellige *inputfaktorers* effektivitetsparametre sammenlignes.

(3) For given produktionsfunktion og λ_i kan de forskellige *sektorers* effektivitetsparametre sammenlignes.

Det er naturligvis (1), som vi først og fremmest er interesseret i.

Ad (1). Det umiddelbare indtryk af tabel (1) er, at for de aggregerede sektorer er de to produktionsfunktioners valg af effektivitetsparametre for praktiske formål identiske. Alle fortegn og absolutte størrelser er stort set overensstemmende. Dette tyder på, at resultaterne i TTH/JSM/KTH op.cit. (som bl.a. var, at egenskaberne for translog -og CES-efterspørgselsfunktionerne groft sagt var sammenfaldende) også gælder for bidraget fra de teknologiske fremskridt.[5]

Ad (2). For alle tre sektorer ses det, at kapitalens effektivitetsindeks er faldende over tid. Lige så klart er det, at arbejdskraftens effektivitetsindeks er stigende

[5]Det skal her nævnes, at der i estimaterne af λ'erne i nogle af de disaggregerede erhverv er visse forskelle mellem translog og CES. I disse sektorer er der imidlertid også som regel forskelle i estimaterne af de andre parametre i efterpørgselsfunktionerne (fx priselasticiteter).

gennem estimationsperioden, hvilket vel virker rimeligt. Energiens indeks har været svagt stigende, mens materialernes har været ca. nul gennem perioden undtaget i QX-sektoren, hvor det er faldet.

En måde at fortolke de enkelte inputfaktorers λ'er på er følgende. Lad os antage, at priserne på faktor 1 - 4 vokser med λ_1 - λ_4. Dette betyder, at alle $\tilde{P}$'er er konstante, hvilket igen betyder, at alle $\tilde{X}$'er er konstante. En konstant $\tilde{X}$ er ensbetydende med, at vækstraten i X_i er (λ^* t + λ_i). Hvis man fx lineariser den kvadratiske trend i normeringsåret 1980 (hvor den er nul), får man altså konstante vækstrater givet ved λ_1 - λ_4. Man kan derfor fortolke λ'erne som vækstrater som priserne i en fremskrivning skal overholde, for at der er konstante vækstrater i faktorniveauerne. Lad os for et øjeblik linearisere den kvadratiske trend og samtidig antage, at inputpriserne er vokset med λ_1-λ_4. Disse antagelser betyder, at vækstraterne i de ønskede X_i/Y-forhold er givet ved λ_1-λ_4. Det er faktisk utroligt, så tæt λ_1-λ_4 ligger på de observerede vækstrater i inputfaktorerne. Som nævnt på s.34 i TTH/JSM/KTH op.cit. er K/Y-forholdet vokset med ca. 2.5% gennem perioden, E/Y-forholdet er faldet ca. 0.5 %, L/Y-forholdet er faldet ca. 3 %, og M/Y-forholdet har været nogenlunde konstant. Dette stemmer meget fint overens med λ_1-λ_4 i de to første søjler i tabel 1.

Ad (3). Den største stigning i arbejdskraftens effektivitet findes i NX-sektoren, hvilket passer fint med den stiliserede kendsgerning, som siger at L/Y-forholdet er faldet mest i fremstillingserhvervene. Den kraftigste udvikling i effektivitets-indeksene findes i QX-erhverne, specielt for kapital og materialer.

Er f_i-funktionerne rimelige ?

Et oplagt spørgsmål at rejse er, om de valgte f_i-funktioner i (14) nu også er meningsfyldte. Meningen med funktionerne var jo, at de skulle fungere som effektivitetskorrektioner af de observerede priser og mængder. Ud fra tabel 1 er det dog svært at se, hvorledes denne korrektion egentlig forløber. I stedet kan man kigge på nogle figurer af forløbet af effektivitetsindeksene.
Nedenfor vises grafer af effektivitetsindeksene for XX-sektoren baseret på CES.[6] Der vises grafer med to forskellige slags f_i-funktioner :

$$e_{it} = e^{\lambda_i t + \lambda^* t^2} \qquad \textbf{(14)}$$

$$e_{it} = e^{\lambda_i t + \lambda_i^* t^2} \qquad \textbf{(23)}$$

(14) er det indeks, som er brugt i tabel 1. (14) er i imidlertid et specialtilfælde af (23), hvor $\lambda_i^* = \lambda^*$. I (23) er de kvadratiske trends med andre ord faktorspeci-fikke, mens de i (14) er ens for alle faktorer. En implikation af dette er, at vækstraterne i (14) er rette linier med samme hældning, men med forskelligt

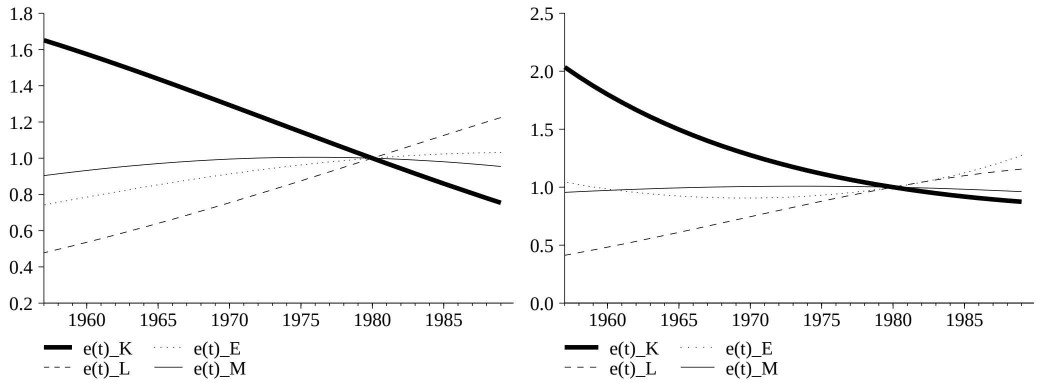
[6]Som det fremgår af tabel 1, er translog-effektivitetsindeksene næsten identiske med CES's.

niveau, mens vækstraterne i (23) også er rette linier, men med *forskellig* hældning og forskelligt niveau. Ved at estimere både (14) og (23), kan vi altså få en indikation om, hvor streng restriktionen i (14) er.[7,8]

I figur 2 vises indeksene (14) og (23).

Figur 2. Effektivitetsindeks for XX-sektoren, CES.

(a) (14) **(b) (23)**



Af fig.2 fremgår det - som nævnt ovenfor - at kapitalens effektivitetsindeks er kraftigt faldende gennem perioden, mens arbejdskraftens er stigende. Der er imidlertid en vigtig forskel mellem 2 (a) og 2 (b): Indekset for kapital og energi skifter krumning (fra en "sur" parabel i (a) til en "glad" parabel i (b)).

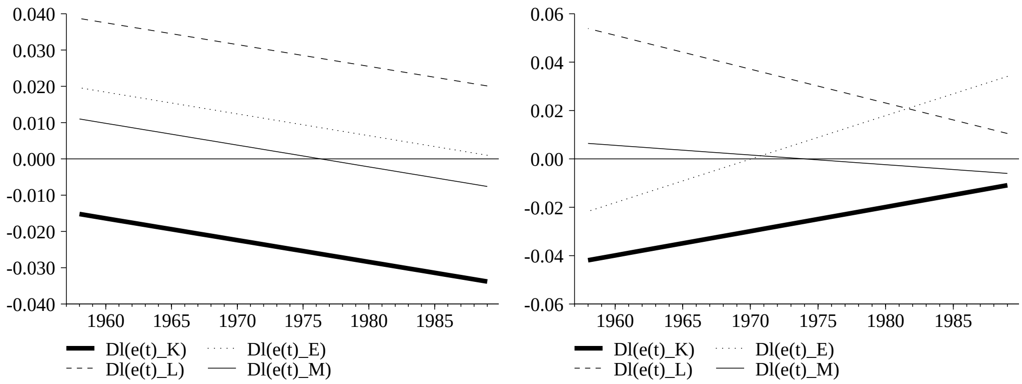
I fig.3 fremgår det meget klart, hvad effekten af at løse op for restriktionen i (14) er. I 3 (a) har alle linier samme hældning (lig λ^*), men forskelligt niveau (lig λ_i i 1980). I 3 (b) tillades linierne at have forskellige hældninger. Igen ses det, at opblødningen af restriktionen på den kvadratiske trend har størst effekt på kapital og energi, hvis vækstrater nu er voksende gennem perioden (hvilket selvfølgelig blot er en reminicens af, at indeksene for K og E i (14) er konkave funktioner, mens de i (23) er konvekse funktioner). Det er ikke mærkeligt, at det er de "små" inputs, kapital og energi, som påvirkes mest af restriktionen i (14), idet estimatet af λ^* i (14) primært bestemmes af de "store" input, arbejdskraft og materialer.

[7]Da (14) er nestet i (23) kan vi naturligvis lave et "rigtigt" test af restriktionen.

[8](23) skal ikke ses som et i modelsammenhæng brugbart alternativ til (14). I faktorefterspørgselsfunktionerne med (23) som effektivitetsindeks indgår der hele 8 trend-parametre ialt, og estimationerne tyder på, at disse spiser noget af priselasticiteterne. Det eneste, (23) skal bruges til, er at vurdere restriktionen på de kvadratiske trends i (14).

Figur 3. Vækstrater i effektivitetsindeks for XX-sektoren, CES.

(a) (14) **(b) (23)**

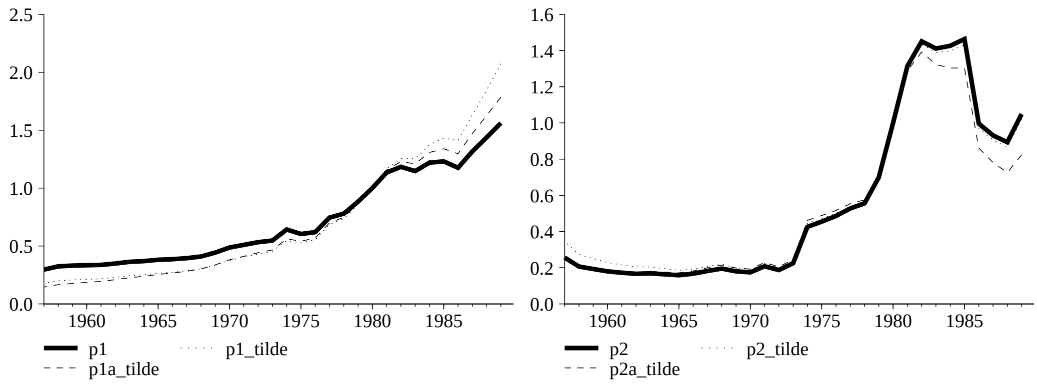


I indledningen blev det nævnt, at effektivitetsformuleringen kunne fortolkes som en målefejlskorrektion. Virksomhedernes sande inputpriser er altså i virkeligheden ikke de observerede P_i, men istedet $\tilde{P}_i$. Det, der interesserer virksomheden, er de effektivitetskorrigerede priser, og ikke de "normale" priser. I figur 4 vises de effektivitetskorrigerede priser sammen med de observerede priser.

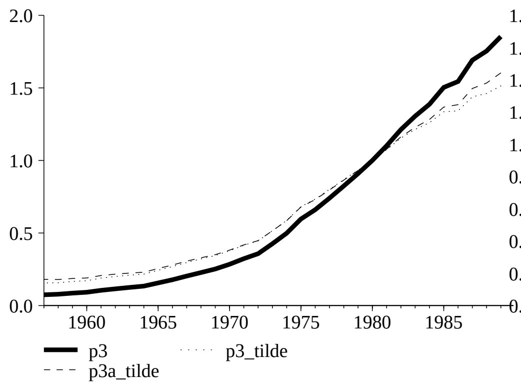
Figur 4. Observerede og effektivitetskorrigerede priser.

p<i> = observeret pris, p<i>_tilde = pris korrigeret med (14),
p<i>a_tilde = pris korrigeret med (23)

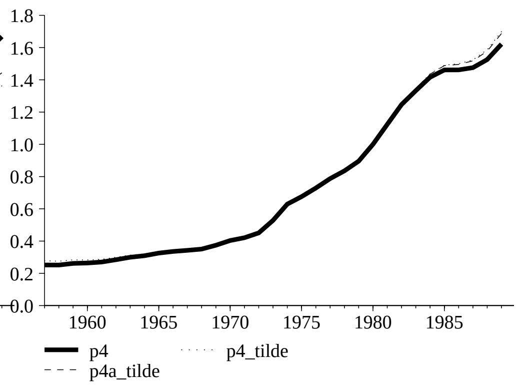
(a) Pris på kapital **(b) Pris på energi**



(c) Pris på arbejdskraft



(d) Pris på materialer



Graferne i fig.4 er (inverse) spejlbilleder af graferne i fig.2. Eksempelvis ses det faldende effektivitetsindeks for kapitalapparatet at medføre, at den effektive pris på kapitalapparatet vokser kraftigere end den observerede pris. Det omvendte gør sig gældende for arbejdskraften.

I det foregående afsnit blev det vist, at vækstraten i hhv. det observerede K/Y og L/Y-forhold i gennemsnit var -2.5 pct og 3 pct. Det blev desuden vist, at denne udvikling modsvaredes af udviklingen i de to faktorers effektivitets-indeks, således at $\tilde{K}/Y$ og $\tilde{L}/Y$ var nogenlunde konstante. En anden måde at se dette på er at betragte de effektivitetskorrigerede priser på K og L. Der er stor forskel på udviklingen i de observerede priser på K og L (lønnen voksede meget kraftigere end user-cost), men forholdet mellem de korrigerede priser på K og L er nogenlunde konstant. Dette stemmer fint overens med, at $\tilde{K}/\tilde{L}$ -forholdet har være konstant.

Konklusion

Der er i dette papir blevet argumenteret for at opfatte indførelsen af trends i en produktionsfunktion som en måde at måle input på i effektive enheder. Denne tankegang har flere fordele. For det første kan effektivitetsformuleringen benyttes med fordel, hvis man ønsker at forklare udviklingen i inputfaktorernes effektivitet med andre variabler end blot tiden. For det andet kan effektivitets-formuleringen anvendes til at sammenligne forskellige produktionsfunktioners effektivitetsindeks. I papiret blev dette brugt til at vise, at der ikke var den store forskel på trendene i CES og translog.

Appendiks A

Ligningssystemet, som skal løses for λ , består af

$$\begin{aligned} \hat{a}_t &= -\hat{a}'\lambda \\ \hat{b}_t &= -\hat{\boldsymbol{B}}\lambda \end{aligned} \tag{A1}$$

Dette er 5 ligninger i 4 ubekendte, som dermed giver os et problem. Problemet har imidlertid en let løsning, idet B - p.gr.a. restriktioner - ikke har fuld rang. Vi har derfor kun 4 uafhængige ligninger. De nederste 4 ligninger er

$$\hat{b}_t = -\hat{\boldsymbol{B}}\lambda \tag{A2}$$

Dette er et ligningssystem med 4 ligninger og 4 ubekendte, men systemet har ingen entydig løsning i $\mathbb{R}^4$, da B kun har rang 3. Vi kan derfor sætte en af parametrene $(\lambda_1,\lambda_2,\lambda_3,\lambda_4)$ til en vilkårlig værdi og få bestemt de resterende 3. Vi vil selvfølgelig benytte den femte ligning i (A1) til at få bestemt den frie parameter.

Systemet (A2) kan klappes ned i $\mathbb{R}^3$ ved at multiplicere med 4x3 matricen M = [I_{3x3} 0_{3x1}]. Man får da

$$M\hat{b}_t = -M\hat{\boldsymbol{B}}\lambda \;\Leftrightarrow\; \bar{b}_t = -\hat{\boldsymbol{B}}_{33}\bar{\lambda} \;\Leftrightarrow\; \bar{\lambda} = -\hat{\boldsymbol{B}}_{33}^{-1}\bar{b}_t \tag{A3}$$

hvor

$$\bar{b}_t = \begin{bmatrix} b_1 t \\ b_2 t \\ b_3 t \end{bmatrix}, \quad \bar{\lambda} = \begin{bmatrix} \lambda_1-\lambda_4 \\ \lambda_2-\lambda_4 \\ \lambda_3-\lambda_4 \end{bmatrix}, \quad \hat{\boldsymbol{B}}_{33} = \begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} & b_{13} \\ b_{12} & b_{22} & b_{23} \\ b_{13} & b_{23} & b_{33} \end{bmatrix} \tag{A4}$$

Det bemærkes, at B_{33} har fuld rang, således at systemet har en entydig løsning for $\bar{\lambda}$. Den første ligning i (A1) giver

$$\hat{a}_t = -\bar{a}'\bar{\lambda} - \lambda_4 \;\Leftrightarrow\; \lambda_4 = \bar{a}'\hat{\boldsymbol{B}}_{33}^{-1}\bar{b}_t - \hat{a}_t \tag{A5}$$

hvor $\bar{a} = (a_1\ a_2\ a_3)'$.

Lad i = (1,1,1)’. Da fås

$$\begin{bmatrix} \lambda_1 \\ \lambda_2 \\ \lambda_3 \end{bmatrix} = \bar{\lambda} + i\lambda_4 = (i\bar{a}' - I_{3x3})\hat{\boldsymbol{B}}_{33}^{-1}\bar{b}_t - ia_t \tag{A6}$$

Samlet har vi altså

$$\begin{bmatrix} \lambda_1 \\ \lambda_2 \\ \lambda_3 \\ \lambda_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} (i\bar{a}' - I_{3x3})\hat{B}_{33}^{-1}\bar{b}_t - i\hat{a}_t \\ \\ \bar{a}'\hat{B}_{33}^{-1}\bar{b}_t - \hat{a}_t \end{bmatrix} \tag{A7}$$

Fra (19) kan vi da bestemme λ^* som

$$\lambda^* = \frac{1}{2}\left[\lambda'\hat{B}\lambda - \hat{a}_{tt}\right] \tag{A8}$$

Alt i alt har vi altså fået bestemt λ_1 - λ_4 og λ^* som funktion af de oprindeligt estimerede parametre.