Danmarks Statistik
MODELGRUPPEN

Arbejdspapir*

John Smidt

27. september 1994

Om udnyttelseskorrigeret kapitalapparat i faktorefterspørgslen

Resumé:

Dette papir ligger i umiddelbar forlængelse af modelgruppepapiret "Mere om faktorefterspørgslen" af d. 28. juli 1994. Det fastslås, at der umiddelbart kun er to muligheder for at løse problemerne omkring eksistensen af den nødvendige arbejdskraft, L^+: At binde substitutionselasticiteten eller at arbejde med et "udnyttelseskorrigeret kapitalapparat", $\hat{K}$.

Størrelsesordenen af de implicerede effektivitetseffekter i kapitalapparatet og de afledte effekter på den nødvendige arbejdskraft af at anvende $\hat{K}$ beregnes. Afhængigheden af substitutionselasticitet (σ), omkostningsandele og grundkørslens niveau for K/K^*-forholdet illustreres. Det vises bl.a., at ikke-lineariteten i multiplikatorerne (afhængighed af grundkørsel og af eksperimentets størrelse) bliver mindre med udnyttelseseffekter end uden.

Estimationsresultater vises med og uden $\hat{K}$ og med og uden restriktioner på σ. For det analyserede erhverv, xx-erhvervet, har introduktionen af $\hat{K}$ ingen praktisk betydning for estimationen. Når restriktionen om en større værdi af σ pålægges, går det primært ud over forklaringskraften i K-ligningen. Vha. multiplikator-eksperimenter illustreres, at mens introduktionen af $\hat{K}$ kun har betydning for kortsigts-dynamikken i multiplikatorerne for L, så har restriktioner på σ primært betydning for langsigtsegenskaberne ved ændringer i faktorpriserne (men ikke i produktionen).

I et bilag vises forskellige mulige funktionsformer til dannelsen af $\hat{K}$.

kapkorr.jsm

Nøgleord: faktorefterspørgsel modelegenskaber investeringer udbud beskæftigelse substitution udnyttelses kapacitetsgrænse dynamik

1. Indledning

I modelgruppepapiret *Mere om faktorefterspørgslen,* John Smidt, Karsten Theil Hansen og Thomas Thomsen, d. 28. juli 1994 blev det beskrevet, hvorledes begrænset substitution mellem arbejdskraft og kapital i kombination med træg tilpasning i kapitalapparatet kan give problemer. I tilfælde af en eksogen forøgelse af afsætningen (produktionen) må indsatsen af arbejdskraft i henhold til tredje-generationstankegangen øges relativt kraftigt for at kompensere for, at kapitalapparatet tilpasser sig langsomt. Hvis substitutionen er meget lille vil den nødvendige stigning i arbejdskraften være meget stor – den kan endda risikere at blive "mere end uendelig stor". Det er med andre ord ikke altid muligt at "vende produktionsfunktion", og tredje-generationsmodellen kan bryde sammen.

Rent matematisk skyldes det potentielle sammenbrud, at isokvanterne for CES-funktionen i tilfældet med substitutionselasticitet mindre end 1 har asymptoter, der ikke er sammenfaldende med akserne. Dette indebærer, at der er en undergrænse for, hvor lidt der kan bruges af den ene af produktionsfaktorerne, hvis en given produktion skal produceres – eller om man vil: Der findes en overgrænse for, hvor meget der kan produceres på et givet kapitalapparat.

Problemet med kapacitetsgrænsen, $\underline{K}$, (asymptoten) er størst når:

- Kapitalapparatet tilpasser sig langsomt
- Substitutionselasticiteten er meget lille
- K/K^*-forholdet er lille
- Kapitalens omkostningsandel er stor

I papiret blev skitseret flere muligheder for at overkomme problemet med kapacitetsgrænsen, der i øvrigt kan siges at være ansvarlig for en lang række af de praktiske, estimationsmæssige problemer, der er stødt på i arbejdet med faktorefterspørgslen. De to løsningsmuligheder, der ligger lige for er:

- Introduktion af et *udnyttelseskorrigeret kapitalapparat,* $\hat{K}$, der indebærer, at kapitalapparatet bliver mere effektivt, når K bliver mere knap. En tolkning af begrebet er, at der eksisterer ledig kapacitet, som tages i brug, når der er kapacitetspres. På denne måde kan man sikre, at det udnyttelseskorrigerede kapitalapparat aldrig kommer under kapacitetsgrænsen.
- *Substitutionselasticiteten,* σ, *kan bindes* til noget større, når den estimeres meget lavt. Skal man gå med livrem og seler skal σ bindes til 1, men med typiske omkostningsandele vil man i praksis være dækket rimeligt ind, blot σ er større end 0.20-0.30; i så fald vil arbejdskraftefterspørgslen først bryde sammen, hvis K bliver mere end 30-45% lavere end K^*.

Som en tredie mulighed, der ikke skal forfølges nærmere i dette papir, kan nævnes muligheden for en alternativ tilpasning i kapitalligningen. Problemet med kapacitetsgrænsen hænger, jf. første pind ovenfor, bl.a. sammen med, at kapitalapparatet tilpasser sig langsomt. Da der samtidigt er problemer med autokorrelation i K-ligningen, kunne man håbe, at det var muligt at slå "to fluer med et smæk" ved at gøre dynamikken i K-ligningen mere fleksibel – evt. ved, at kapacitetsgrænsen på en eller anden måde inddrages i tilpasningsprocessen for K.

Strukturering af papiret

I det følgende afsnit 2 beskrives indledningsvis forslaget til et udnyttelses-korrigeret kapitalapparat. Herefter vises vha. stiliserede multiplikatorer, hvorledes udnyttelseseffekterne påvirker K ($\hat{K}$) og den nødvendige arbejdskraft, L^+ – afhængigt af værdien af σ, eksperimentets størrelse og grundkørslens udseende. I afsnit 3 vises estimationsresultater med og uden udnyttelses-korrigeret kapitalapparat, og til sammenligning vises estimationer, hvor substitutionselasticiteten bindes. Der vises multiplikatorer på de estimerede modeller. Afsnit 4 indeholder en kort opsummering. I et bilag fremlægges forslag til funktionsform for $\hat{K}$, og disse funktioners egenskaber sammenlignes med den konstruktion, der er blevet foreslået tidligere.

2. Udnyttelseskorrigeret kapitalapparat, substitutionselasticiteter og grundkørselsafhængighed

Forslaget til *udnyttelseskorrigeret kapitalapparat*, der blev fremlagt i det nævnte modelgruppepapir, går ud på at transformere udtrykket for K, inden det går ind ligningen for arbejdskraften. Arbejdskraftligningen – eller mere præcist, ligningen for "den nødvendige" arbejdskraft, L^+ – fremkommer i tredje-generationsmodeller ved at vende produktionsfunktionen om, idet produktionen, Y, og kapitalapparatet, K, tages for givet. Forslaget til udnyttelseskorrigeret kapitalapparat går, som nævnt, ud på at transformere det observerede kapitalapparat, K. Konkret var forslaget i papiret:

$$\hat{K} = \frac{K - (1-\mu)\underline{K}}{K^* - (1-\mu)\underline{K}} \left[K^* - \underline{K}\right] + \underline{K} \qquad \textbf{(1)}$$

hvor $\hat{K}$ er det udnyttelseskorrigerede kapitalapparat, $\underline{K}$ er kapacitetsgrænsen (minimums-K), og K^* er det optimale, langsigtede kapitalapparat. μ er en parameter, der styrer, hvor kraftig udnyttelseseffekten er, jf. nedenfor.

Sættes μ=0 i relation (1), bliver $\hat{K}$ = K, og der er ingen udnyttelseseffekter i kapitalapparatet. Med μ=1 reduceres udtrykket for $\hat{K}$ til:

$$\hat{K} = \left(1 - \frac{\underline{K}}{K^*}\right) K + \underline{K} \qquad \textbf{(1')}$$

hvoraf det fremgår, at for K=0 bliver $\hat{K} = \underline{K}$, mens K>0 indebærer, at $\hat{K} > \underline{K}$. Der henvises til bilag 1 for en grafisk illustration. Konstruktionen med μ=1 sikrer, at det udnyttelseskorrigerede kapitalapparat altid er større end kapacitets-grænsen, hvilket igen sikrer, at L^+ altid kan findes. Sættes μ mindre end 1, er man ikke sikret mod, at $\hat{K}$ kan blive mindre $\underline{K}$, og der er altså ikke noget, der sikrer, at modellen fungerer i alle tænkelige tilfælde. Specielt vil risikoen for, at modellen bryder sammen være større, des mindre σ er. Under alle omstændigheder gælder, at $\hat{K} = K$ på langt sigt, dvs. når $K = K^*$.

Den konkrete funktionsform kan naturligvis diskuteres. I bilag 1 er der foreslået to andre funktionsformer, der virker tiltalende. De forskellige funktionsformer adskiller sig ikke mindst fra hinanden, når K er væsentlig forskellig fra K^*. De resultater, der vises i den resterende del af papiret, og som udelukkende baseres på transformationen (1) (med varierende værdier af μ), kan derfor opfattes som rimeligt dækkende i en (ret stor) omegn omkring K=K^*; i bilaget er dog for fuldstændighedens skyld angivet et udvalg af resultater for de alternative funktionsformer.

"Effektivitetseffekt" på kapitalapparatet

Begrebet "udnyttelseskorrigeret kapitalapparat" kan, som nævnt, opfattes som en introduktion af ledig kapacitet. Man kan forestille sig virksomhederne i tilfælde af øget afsætning tager hidtil uudnyttet kapital i anvendelse eller – alternativt – at virksomhederne øger antallet af "maskintimer" fx ved øget skifteholdsarbejde eller lignende. I praksis er der naturligvis en grænse for, hvor meget det givne, fysiske kapitalapparat kan udnyttes ekstra i forbindelse med kapacitetsproblemer – fx ved en eksogen stigning i afsætningen. At det til en vis grad er muligt at øge den effektive kapitalmængde, er næppe til diskussion, men hvorvidt den foreslåede skitse er en hensigtsmæssig måde at introducere disse effekter på, er naturligvis mere åbent; tilsvarende kan størrelsesordenen af de implicerede effekter diskuteres.

Effektivitetseffekterne i kapitalapparatet kan passende måles ved effekten på forholdet $\hat{K}/K$. I det omfang dette forhold øges, er kapitalen blevet "mere effektiv". Størrelsesordenen af effekterne afhænger bl.a. af substitutionselasticiteten, af niveauet for omkostningsandelene og K/K^*-forholdet samt af værdien af μ. Effektivitetseffekterne optræder fx når produktionen ændres: Øges produktionen med 1% vil både K^* og $\underline{K}$ (som følge af antagelsen om konstant skalaafkast) stige med 1%, men som følge af trægheder i kapitaltilpasningen vil det fysiske kapitalapparat, K, ændres mindre end 1%. I forhold til bestemmelsen af arbejdskraften er det udviklingen $\hat{K}$, der er af betydning. Da $\hat{K}$ kan opfattes som et vejet gennemsnit af K og K^*, vil $\hat{K}$ stige mere end K, hvilket altså svarer til at kapitalapparatets effektivitet stiger på kort sigt.[1] Alt i alt følger, at L^+ øges mindre *med* udnyttelseseffekter ($\hat{K}$), end *uden*.

I omstående tabel 1 er vist effekten på $\hat{K}$ af at øge produktionen 1% for fastholdt fysisk kapitalapparat (man kan tænke, at investeringsligningen først reagerer på en ændring i K^* med et lag på et år). I tabellen er angivet den procentvise effekt på $\hat{K}$ for fastholdt K. Tallene i tabellen kan derfor tolkes som effekten på kapitalapparatets effektivitet: $\hat{K}/K$. Effekterne er beregnet under antagelse om, at kapitalens omkostningsandel, s_K^*, er 0.25.

[1]Man kan alternativt sige, at træghederne i K reelt reduceres, når $\hat{K}$ introduceres.

Det fremgår af tabel 1, at kapitalapparatets effektivitet – naturligvis – ikke påvirkes, når μ er lig 0; i dette tilfælde er $\hat{K}$, som nævnt, lig K. Sættes μ forskellig fra nul træder effektivitetseffekten i kraft. Det fremgår eksempelvis, at en 1%-stigning i produktionen fra ligevægt (K=K^*) vil øge $\hat{K}$ med 15%, hvis μ=0.1 og σ=0.25. Effekten på kapitalapparatets effektivitet forøges, jo større μ er.

Det fremgår endvidere af tabel 1, at effekten på $\hat{K}$ er størst, når σ er lille og/eller, når K i udgangssituationen er mindre end K^*. Baggrunden for dette er, at afstanden mellem det fysiske K og kapacitetsgrænsen, $\underline{K}$, alt andet lige er mindre, når σ er lille (isokvanterne er "kantede"), eller når K er lille (relativt til K^*). Behovet for at justere kapitalapparatet, således at den korrigerede størrelse, $\hat{K}$, er større end $\underline{K}$, er derfor størst i disse situationer. Det fremgår af tabellen, at effektivitetseffekten for σ=0.50 er ret begrænset og selv med maksimal værdi af μ kun ca. 25%. Omvendt er effekten meget stor for σ=0.15, hvor den implicerede effekt på kapitalens effektivitet, selv for små værdier af μ overstiger 50%. For en grafisk illustration af effektivitetseffekterne henvises til figuren i bilag 1.

Tabel 1. Effekt på $\hat{K}$ af at øge Y 1% for fastholdt K.
Forskellig substitutionselasticitet og μ. s_K^* = 0.25

	μ	K=0.7· K^*	K=0.8· K^*	K=0.9· K^*	K=K^*	K=1.1· K^*
Sigma=0.15	μ=0.00	•	0.00	0.00	0.00	0.00
	μ=0.10	0.32	0.31	0.29	0.27	0.25
	μ=0.25	0.55	0.53	0.50	0.47	0.45
	μ=0.50	0.71	0.69	0.67	0.64	0.62
	μ=1.00	0.83	0.82	0.80	0.78	0.77
Sigma=0.25	μ=0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00
	μ=0.10	0.18	0.18	0.16	0.15	0.13
	μ=0.25	0.36	0.35	0.32	0.30	0.28
	μ=0.50	0.53	0.53	0.49	0.46	0.44
	μ=1.00	0.69	0.68	0.65	0.63	0.61
Sigma=0.35	μ=0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00
	μ=0.10	0.11	0.10	0.09	0.08	0.08
	μ=0.25	0.23	0.22	0.20	0.18	0.17
	μ=0.50	0.38	0.36	0.33	0.31	0.29
	μ=1.00	0.55	0.53	0.50	0.47	0.45
Sigma=0.50	μ=0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00
	μ=0.10	0.04	0.04	0.04	0.03	0.03
	μ=0.25	0.10	0.09	0.08	0.08	0.07
	μ=0.50	0.18	0.17	0.16	0.14	0.13
	μ=1.00	0.31	0.29	0.27	0.25	0.23

Anm. • markerer, at effekten ikke kan beregnes, da L^+ ikke eksisterer (K<$\underline{K}$)

I omstående tabel 2 er vist, hvorledes effektivitetseffekterne også afhænger af kapitalens omkostningsandel, s_K^*.

Tabel 2. Effekt på $\hat{K}$ af at øge Y 1% for fastholdt K. Forskellig omkostningsandel og μ. σ=0.25

		K=0.7· K^*	K=0.8· K^*	K=0.9· K^*	K=K^*	K=1.1· K^*
Omkostnings-andel, s_K^*=0.15	μ=0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00
	μ=0.10	0.13	0.12	0.11	0.10	0.09
	μ=0.25	0.27	0.26	0.24	0.22	0.20
	μ=0.50	0.43	0.41	0.39	0.36	0.34
	μ=1.00	0.60	0.59	0.56	0.53	0.51
Omkostnings-andel, s_K^*=0.25	μ=0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00
	μ=0.10	0.18	0.18	0.16	0.15	0.13
	μ=0.25	0.36	0.35	0.32	0.30	0.28
	μ=0.50	0.53	0.53	0.49	0.46	0.44
	μ=1.00	0.69	0.68	0.65	0.63	0.61
Omkostnings-andel, s_K^*=0.35	μ=0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00
	μ=0.10	0.24	0.23	0.21	0.19	0.18
	μ=0.25	0.44	0.43	0.40	0.37	0.35
	μ=0.50	0.61	0.60	0.57	0.54	0.52
	μ=1.00	0.76	0.75	0.73	0.70	0.68

Det fremgår af tabel 2, at effektivitetseffekten er størst, når s_K^* er stor. Den intuitive baggrund for dette er, at en større omkostningsandel (med substitutionselasticitet mindre end 1) svarer til en højere relativ pris på kapital. Herved anvendes mindre kapital (K^* bliver mindre), og K kommer derved alt andet lige tættere på $\underline{K}$ (der ikke påvirkes af ændrede relative priser). Vi har derfor, at "behovet" for at justere K er større.

Det kan naturligvis diskuteres, hvorvidt størrelsesordenen af de implicerede effekter er rimelige. Som nævnt kan effekterne tolkes på den måde, at virksomhederne tager ledig kapital i anvendelse i forbindelse med øget kapacitetspres. Tages effekterne for pålydende vil et μ på 0.25, og σ på 0.15 (jf. tabel 1) implicere følgende: Produktionen øges 1%. Herved øges K^* (og $\underline{K}$) med 1%, men K antages fast pga. trægheder. Af den langsigtede, ønskede stigning i kapitalapparatet på 1%, kan virksomhederne finde næsten halvdelen (de 0.47%) i form af hidtil ubrugt kapital. Den videre effekt heraf (ikke vist i tabellen) er, at tredje-generationseffekten på arbejdskraften (det, at arbejdskraften på kort sigt øges med mere end 1% for at kompensere den relativt lille stigning i kapitalen) ikke vil blive så kraftig, som hvis det ikke var muligt for virksomhederne at tage ledig kapital i anvendelse (se evt. omstående tabel 3). Ved vurdering af effekternes størrelsesorden bør det erindres, at i det omfang det fysiske kapitalapparat, K, i det indeværende år reagerer på ændringer i K^*, vil effektivitetseffekterne bliver mindre end vist i tabellen; i grænsetilfældet fuld tilpasning, dvs. K altid lig K^*, vil effektivitetseffekterne ikke være tilstede uanset værdien af μ. Endelig bemærkes, at de implicerede effektivitetseffekter kun er et kortsigtsfænomen, idet effekterne forsvinder, når K (på sigt) bliver lig K^*

Som det fremgår, fås den maksimale effekt på kapitalens effektivitet, når substitutionselasticiteten er lille. I grænsetilfældet σ=0 er K^* og $\underline{K}$ sammenfaldende. Af (1') fremgår det da, at $\hat{K}$ (for μ=1) også bliver lig K^* (og $\underline{K}$). I dette tilfælde vil en stigning i produktionen på 1% altså indebære en stigning i det udnyttelseskorrigerede kapitalapparat på 1%. Hvis det fysiske kapitalapparat pga. trægheder er konstant, er tolkningen, at det er muligt at finde hele den "nødvendige" kapital i form af hidtil ledig kapacitet; i tilfældet σ=0 (Leontief) er det netop "nødvendigt" at den effektive kapital øges med 1%, hvis der skal produceres 1% mere. Det bemærkes, at når den effektive kapital øges med 1%, så stiger den nødvendige arbejdskraft, L^+, netop med 1%, og vi får altså ingen tredje-generationseffekter i arbejdskraften; tredje-generationseffekterne optræder jo netop, fordi kapitalen er træg, og i det beskrevne grænsetilfælde er kapitalen (i effektivitetsenheder) jo netop ikke træg.

Effekter på den nødvendige arbejdskraft, L^+

Introduktionen af det udnyttelseskorrigerede kapitalapparat har udelukkende betydning for fastlæggelsen af den nødvendige arbejdskraft, L^+. Generelt afhænger effekten på L^+ af σ, af K/K^*-forholdet, af omkostningsandelene samt af tilpasningshastigheden i K. Disse fire punkter er sammenfaldende med de i indledningen fremhævede punkter vedr. problemer med kapacitetsgrænsen: Jo større problemer med kapacitetsgrænsen (større risiko for sammenbrud af tredje-generationsmodellen), jo større er effekten på L^+ i udgangspunktet. Modstykket til dette er, at en kraftig hensyntagen til problemet med kapacitetsgrænsen, dvs. μ = 1, indebære mindre effekter på L^+. Med inddragelsen af det udnyttelseskorrigerede kapitalapparat, $\hat{K}$, kommer effekten på L^+ derfor foruden af de fire nævnte punkter til at afhænge af μ.

I nedenstående tabel 3 er vist, hvorledes effekten på L^+ afhænger af μ, af σ, af K/K^*-forholdet i grundkørslen, samt af eksperimentets størrelse.

Tabel 3. Effekt på L^+ af en stigning i Y på 1 %
Afhængighed af σ, μ samt K/K^*-forhold i grundkørsel

		$K=0.7\cdot K^*$	$K=0.8\cdot K^*$	$K=0.9\cdot K^*$	$K=K^*$
Sigma = 0.15	μ=0.0	• (•)	7.85 (•)	1.61 (1.98)	1.24 (1.33)
	μ=0.1	2.92 (•)	1.81 (2.31)	1.32 (1.42)	1.18 (1.22)
	μ=1.0	1.06 (1.07)	1.06 (1.07)	1.06 (1.06)	1.05 (1.05)
Sigma = 0.25	μ=0.0	2.06 (2.52)	1.69 (1.91)	1.37 (1.46)	1.24 (1.28)
	μ=0.1	1.62 (1.78)	1.46 (1.56)	1.29 (1.34)	1.20 (1.24)
	μ=1.0	1.11 (1.12)	1.10 (1.11)	1.09 (1.10)	1.09 (1.09)
Sigma = 0.50	μ=0.0	1.35 (1.39)	1.32 (1.36)	1.27 (1.30)	1.24 (1.26)
	μ=0.1	1.33 (1.37)	1.31 (1.31)	1.26 (1.29)	1.23 (1.25)
	μ=1.0	1.22 (1.23)	1.21 (1.22)	1.19 (1.21)	1.18 (1.19)

Anm. I parentes er angivet 1/10 gange effekten på L^+ af en stigning i Y på 10%
Ved beregning af effekterne er antaget, at $s_K{}^*$=0.25, og at første års effekten på K = 0.3%
• markerer, at effekten ikke kan beregnes, da L^+ ikke eksisterer: $K<\underline{K}$ ($\hat{K}<\underline{K}$)

Af tabellen bemærkes bl.a.:

- Kombinationen af et lille σ og lille μ indebærer meget store effekter på L^+ (øverste venstre hjørne af tabellen). Kombinationen af lille σ og stor μ indebærer derimod en meget lille effekt på L^+. I grænsetilfældet, σ=0 og μ=1, er effekten på L^+ nøjagtig 1%, og der er altså ikke nogen tredje-generationseffekt i arbejdskraften.
- Ikke-lineariteten som følge af afhængighed af udgangssituationen er størst, når σ (og μ) er lille: Effekten på L^+ er størst, når K er mindre end K^* i udgangssituationen. Ikke-lineariteten som følge af eksperimentets størrelse (om Y øges 1 eller 10%) er helt marginal, når σ er stor og/eller μ er stor, men til gengæld betydelig med kombinationer af små σ'er og små μ'er.
- Effekten på L^+ er (naturligvis) lille, når μ er stor; betydningen af at variere μ er meget stor, når σ er lille. Når K=K^* og μ=0, er effekten på L^+ af en stigning i Y på 1% uafhængig af værdien af σ (=1.24).[2]

Det fremgår således af tabellen, at betydningen af introduktionen af det udnyttelseskorrigerede kapitalapparat er stor, når substitutionen er lille. Dette er ikke overraskende, fordi det netop var denne situation, der gav anledning til problemer med kapacitetsgrænsen, $\underline{K}$, og deraf følgende introduktion af $\hat{K}$. Det fremgår også, at ikke-lineariteten (afhængigheden af eksperimentets størrelse og af udgangssituationens K/K^*-forhold) er størst, når σ (og μ) er lille. Som det fremgår af øverste venstre hjørne af tabellen, kan effekterne blive helt ekstreme, når der ikke anvendes udnyttelseskorrektion, og når K er væsentligt mindre end K^*; baggrunden for dette er, at K i disse situationer kommer tæt på $\underline{K}$ – og konkret kommer under $\underline{K}$ i visse tilfælde, indikeret med en •.[3] Generelt er situationen med stor substitution omvendt karakteriseret ved, at introduktionen af det udnyttelseskorrigerede kapitalapparat ikke betyder alverden, og at ikke-lineariteten er begrænset.

Et andet forhold, der er væsentligt at bemærke, er, at effekten på L^+ under normale omstændigheder (dvs. uden brug af det udnyttelseskorrigerede kapitalapparat) er størst, når σ er lille; fx er effekten på L^+ 1.61% med σ=0.15, mens den er 1.27% med σ=0.50 (for K=0.9$\cdot$ K^*). Under anvendelse af det udnyttelseskorrigerede kapitalapparat reduceres effekten på L^+ til 1.06 med σ=0.15, mens effekten er stort set uændret for σ=0.50. Baggrunden for dette kan bl.a. ses i tabel 1, hvoraf det fremgik, at kapitalapparatets "effektivitet" forøges væsentligt kraftigere med små σ'er end med store. Med σ=0.15 og μ=1 øges det effektive kapitalapparat, jf. tabel 1, med ca. 80%; hermed bliver

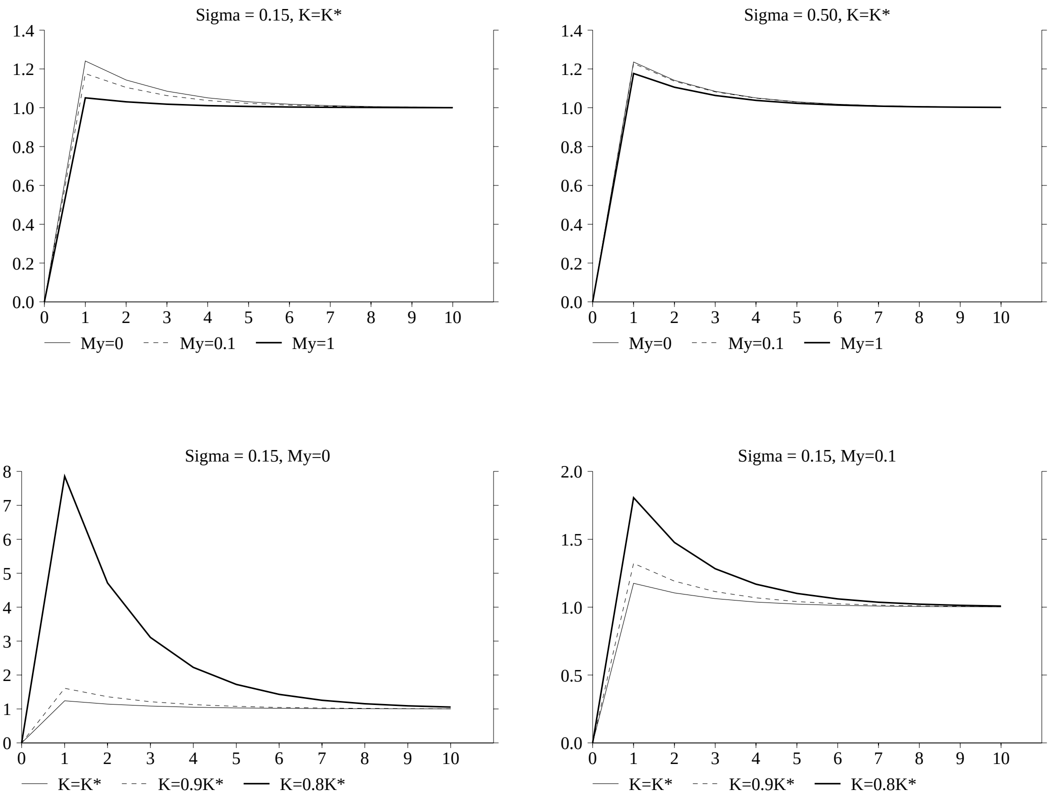
[2]Effekten på L^+ kan i dette tilfælde findes som $1+(s_K^*/(1-s_K^*))\cdot\varepsilon_K$, hvor ε_K er effekten på kapitalapparatet. I eksemplet i tabellen er ε_K=0.3, og s_K^* = 0.25 (jf. anmærkningen), hvilket giver en effekt på L^+ på 1.23. Forskellen til de angivne 1.24 skyldes en kombination af afrunding og, at K/K^*-ændres marginalt som følge af eksperimentet.

[3]Med σ=0.15 er $\underline{K}$ (under antagelse om den givne omkostningsandel på s_{K*}=0.25) lig med 0.7830 gange K^*. Dette indebærer, at når K i udgangssituationen er lig 0.8$\cdot$ K^*, så skal Y ikke øges ret meget, før K kommer faretruende tæt på den kritiske grænse, $\underline{K}$.

effekten på L^+ i dette tilfælde meget lille – selv om σ er lille.

Som afslutning på dette afsnit er til illustration vist et par figurer med det dynamiske forløb for på L^+, svarende til nogle af kombinationerne i tabel 3; det fremgår, at betydningen af om $\hat{K}$ anvendes eller ej væsentligst har effekt inden for de første 5 år:

Figur 1. Effekt på L^+ af en stigning i Y på 1%. Forskellige kombinationer af μ, σ og K/K^*



3. Estimation med udnyttelseskorrigeret kapitalapparat og/eller restriktion på sigma

I omstående tabel 4 er vist, hvorledes estimationsresultaterne for *xx*-erhvervet påvirkes af introduktionen af det udnyttelseskorrigerede kapitalapparat. Dette erhverv er valgt til illustration, fordi det i fri estimation får en ret lille værdi af σ ($\approx$0.15); behovet for (og betydningen af) $\hat{K}$-konstruktionen er jo netop størst for små værdier af σ. Endnu er det konkrete valg af dynamisk specifikation ikke lagt fast, men som udgangspunktet er følgende valgt, også jf. det tidligere nævnte modelgruppepapir af d. 28. juli 1994:

$$\begin{aligned} \mathrm{Dlog}(K) &= \gamma_{0K}\left(\log(K^*(-1)) - \log(K(-1))\right) + \gamma_{1K}\,\mathrm{Dlog}(K^*) \\ \mathrm{Dlog}(L) &= \gamma_{0L}\left(\log(L^+(-1)) - \log(L(-1))\right) + \gamma_{1L}\,\mathrm{Dlog}(L^+) \end{aligned} \qquad (2)$$

idet K^* er det langsigtede, ønskede kapitalapparat og L^+ er den "nødvendige" arbejdskraft (for de matematiske udtryk for disse størrelser findes i det nævnte modelgruppepapir).

Ligningssystemet (2) estimeres under følgende antagelser:

I	Frit estimeret σ – ingen udnyttelseseffekt	(μ=0)
II	Frit estimeret σ – delvis udnyttelseseffekt	(μ=0.10)
III	Frit estimeret σ – delvis udnyttelseseffekt	(μ=0.25)
IV	Frit estimeret σ – fuld udnyttelseseffekt	(μ=1)
V	σ bundet til 0.25 – ingen udnyttelseseffekt	(μ=0)
VI	σ bundet til 0.25 – delvis udnyttelseseffekt	(μ=0.25)
VII	σ bundet til 0.25 – fuld udnyttelseseffekt	(μ=1)
VIII	σ bundet til 0.50 – ingen udnyttelseseffekt	(μ=0)

For at tage konklusionen om betydning for estimationsresultaterne af at inddrage $\hat{K}$ (μ>0) først: *Der er ingen effekt af betydning* på likelihood-værdi, parametre eller statistiske egenskaber! Dette fremgår ved at sammenligne estimationerne I-IV indbyrdes (eller V-VII). Leder man med lys og lygte efter en forskel, finder man, at første årseffekten på L (af en ændring i L^+) bliver større, når det udnyttelseskorrigerede kapitalapparat introduceres. Dette passer fint med, at anvendelse af $\hat{K}$ jo mindsker effekterne på i L^+ (jf. fx tabel 3), hvilket estimationen kvitterer for ved at øge koefficienten til ændringen i L^+ (marginalt).

Sammenligner man estimationsresultaterne med frit estimeret σ (I-IV) med dem med bunden σ (V-VIII), fremgår det, at betydningen af at binde σ primært giver sig udslag i forklaringskraft og trend i K-ligningen; de dynamiske egenskaber, forudsigelsesfejlene og forklaringsevnen i L-ligningen påvirkes praktisk taget ikke.

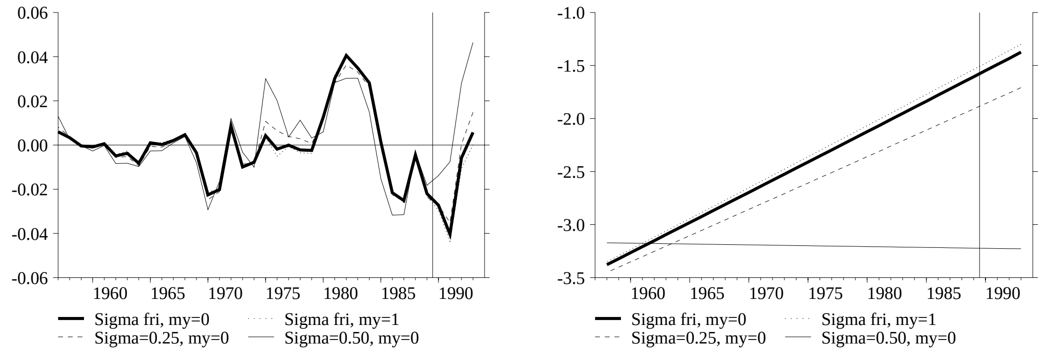
Da σ i fri estimation bliver 0.11-0.14, er det klart, at det er estimationerne med σ bundet til 0.25 (V-VII), der afviger mindst fra dem med frit estimeret σ (I-IV). Det fremgår, at denne restriktion ikke er statistisk signifikant (uanset om der kigges på spredningen af σ-estimatet eller forskellen i likelihood-værdi). Modelmæssigt er den eneste betydning af at pålægge restriktionen σ=0.25, at priselasticiteterne fordobles. Restriktionen σ=0.50, der giver yderligere en fordobling af priselasticiteterne, må derimod statistisk set afvises (2 gange forskel i likelihood-værdi er CHI^2-fordelt med 1 frihedsgrad). Det er interessant, at det, som nævnt, stort set udelukkende er K-ligningen, der "ikke kan lide" en høj σ, også jf. nedenstående figur.

Tabel 4. Estimation af *xx*-erhvervet.
Kombinationer af udnyttelseseffekt i kapitalapparatet og/eller restriktioner på σ

		Langsigtede pris-elasticiteter		Tilpasning til ændring i K^* hhv. L^+			Vækstrate i effektivitets-indeks		Forudsigel-sesfejl, 1991-93	Statistiske egenskaber			μ	σ (spredn.)	LL
		uc	*w*	1. år	2.år	3. år	1960	1990	($CHI^2(3)$)	DW	s%	R^2 (diff)			
I	*K*	–0.11	0.11	0.42	0.69	0.84	–3.26	–1.55	2.6	0.69	1.69	0.70	0	0.142 (0.067)	184.72
	L	0.03	–0.03	0.64	0.79	0.88	6.86	0.83	9.5	1.65	1.52	0.79			
II	*K*	–0.10	0.10	0.41	0.68	0.83	–3.23	–1.49	2.8	0.70	1.68	0.70	0.10	0.119 (0.100)	184.76
	L	0.02	–0.02	0.69	0.82	0.90	6.86	0.84	10.4	1.60	1.52	0.81			
III	*K*	–0.09	0.09	0.40	0.68	0.84	–3.23	–1.47	3.0	0.69	1.68	0.70	0.25	0.116 (0.099)	184.74
	L	0.02	–0.02	0.73	0.84	0.90	6.88	0.85	10.3	1.58	1.52	0.84			
IV	*K*	–0.10	0.10	0.39	0.69	0.84	–3.23	–1.48	3.1	0.69	1.68	0.70	1	0.120 (0.097)	184.77
	L	0.02	–0.02	0.77	0.85	0.91	6.89	0.89	9.4	1.58	1.52	0.87			
V	*K*	–0.20	0.20	0.43	0.69	0.83	–3.35	–1.86	2.1	0.68	1.75	0.71	0	0.25 (•)	183.74
	L	0.05	–0.05	0.68	0.82	0.89	6.89	0.91	10.3	1.62	1.52	0.81			
VI	*K*	–0.20	0.20	0.42	0.69	0.83	–3.35	–1.86	2.1	0.67	1.74	0.70	0.25	0.25 (•)	183.70
	L	0.05	–0.05	0.71	0.83	0.90	6.89	0.93	10.1	1.60	1.51	0.83			
VII	*K*	–0.20	0.20	0.41	0.69	0.84	–3.35	–1.86	2.2	0.66	1.74	0.70	1	0.25 (•)	183.76
	L	0.05	–0.05	0.75	0.84	0.90	6.89	0.96	9.1	1.60	1.51	0.87			
VIII	*K*	–0.39	0.39	0.44	0.60	0.72	–3.17	–3.22	3.1	0.84	2.03	0.80	0	0.50 (•)	179.18
	L	0.11	–0.11	0.68	0.79	0.87	6.83	1.27	9.9	1.67	1.53	0.82			

Nedenstående vises residualerne og vækstraten i trenden i *K*-ligningen for estimationerne I, IV, V og VIII fra tabel 1:

Figur 2. Residualer og trend i *K*-ligning. Forskellige estimationer.

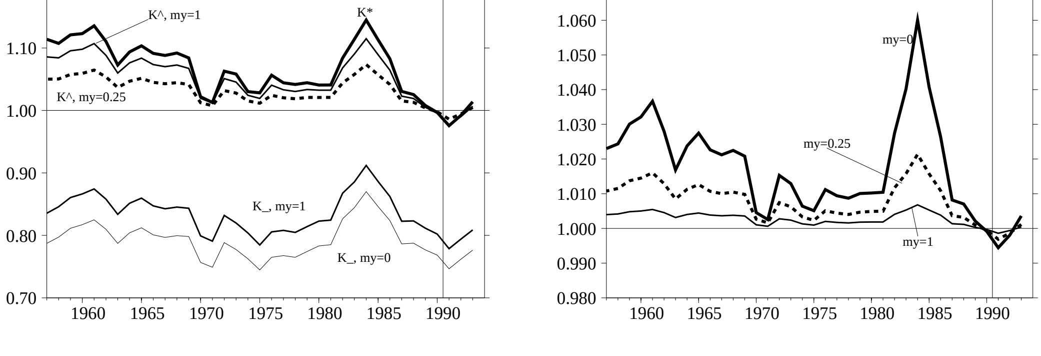


Af grafen til venstre ses det, at residualerne med frit estimeret σ og μ lig 0 hhv. 1 for praktiske formål ikke kan skelnes fra hinanden (hvilket er det, der måtte forventes på baggrund af tabel 4). Residualerne fra σ=0.50-estimationen afviger fra de øvrige residualer, specielt fra midt i 1970'erne og frem. Af den højre graf ses, hvorledes den estimerede vækstrate i trenden i *K*-ligningen for σ=0.50 er nærmest konstant (t^2-leddet i effektivitetsindekset er næsten 0), mens de øvrige estimationer giver en over tid stigende (mindre negativ) vækstrate i *K*'s effektivitetsindeks. Både residualer og trend i *L*-ligningen er næsten identiske på tværs af de forskellige estimationer, hvorfor de ikke vises her.

I nedenstående graf er vist en række størrelser, der illustrerer betydningen af det udnyttelseskorrigerede kapitalapparat – dvs. betydning af at variere μ i estimationer I-IV.

Figur 3. Effekt af det udnyttelseskorrigerede kapitalapparat.
Forskellig værdier af μ

(a) $\hat{K}/K$, $\underline{K}/K$ og K^*/K. **(b) L^+/L^***



I figur 3 (a) er $\hat{K}$, $\underline{K}$ og K^* skaleret med det observerede *K*. K^*, der for praktiske formål er uafhængig af værdien af μ og derfor kun vist i én "udgave", har igennem næsten hele estimationsperioden ligget over det observerede K, jf. den fede kurve. Kurverne for $\hat{K}$ ligger mellem 1.00-linjen (svarende til det observerede K) og K^*; $\hat{K}$ kan således opfattes som et vejet gennemsnit af K og K^*. Det fremgår, at jo større μ er, jo tættere ligger $\hat{K}$ på K^*; for μ=0 er $\hat{K}$ og K pr. definition sammenfaldende (svarende til, at $\hat{K}$ ligger på 1.00-linien). De to nederste kurver i figuren er $\underline{K}$; kurven for μ=1 og μ=0.25 er for praktisk formål sammenfaldende, hvorfor kun den første er vist. Da $\underline{K}$ udelukkende er en funktion af Y, er forløbet af $\underline{K}$ helt parallelt for forskellige værdier af μ; niveauforskellen følger af forskelligt estimerede parametre. I figur 3 (b) ses forholdet mellem L^+ og L^* for μ=0, 0.25 hhv. 1.00; L^* er den langsigtede arbejdskraftefterspørgsel – for K=K^* er L^*=L^+.

Sammenhængen mellem figurerne er følgende: Fortegnet på L^+/L^* følger fortegnet på K^*/K: Når K er mindre end K^*, så må L^+ være større end L^*. Omvendt gælder, at jo tættere K (eller mere præcis $\hat{K}$) er på K^*, jo mindre behøver afvigelse mellem L^+ og L^* at være. Betydningen af det udnyttelseskorrigerede kapitalapparat bliver større, jo tættere K er på $\underline{K}$: Hvis der ingen udnyttelseseffekter er – μ=0 – så vil et K tæt på $\underline{K}$ indebære meget store afvigelser mellem L^+ og L^*, blot der er en lille afvigelse mellem K og K^*. Betydningen af, hvor K er i forhold til K^* (eller i forhold til $\underline{K}$), er med udnyttelseseffekter – μ=1 – meget mindre: Med den begrænsede substitution, der er tale om her – σ=0.10-0.15 – er $\hat{K}$, som det fremgår af figuren, næsten sammenfaldende med K^*, hvilket giver et L^+/L^*-forhold nær 1.

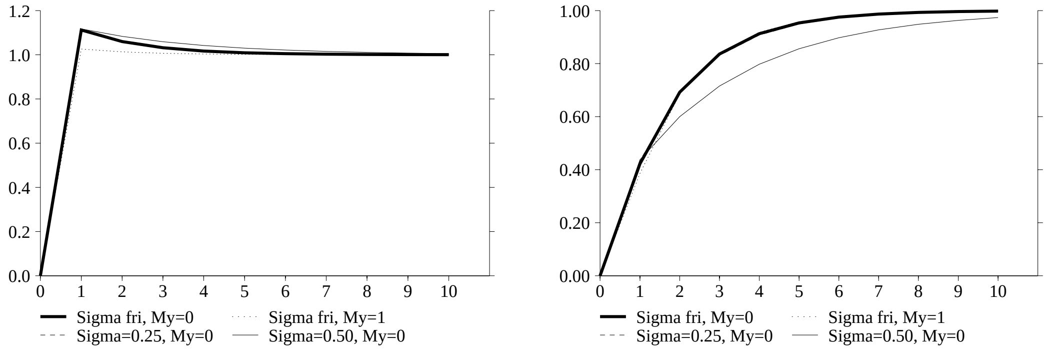
Det er med disse kommentarer i baghovedet ikke overraskende, at det største udslag på L^+/L^*-forholdet ses i højkonjunktur-perioden 1983-87, hvor dels K er relativt tæt på kapacitetsgrænsen $\underline{K}$, dels K^* er væsentlig større end K. Som det fremgår indebærer udnyttelseseffekterne, at det voldsomme udslag i L^+/L^* dæmpes, jf. kurven my=1.

Afslutningsvis vises et par multiplikatorer foretaget med modeller svarende til estimationerne I, IV, V og VIII i tabel 4. Grundkørslen er dannet med udgangspunkt i værdierne for de eksogene variabler (dvs. produktion og faktorpriser) i 1990, idet faktorefterspørgslen antages at have tilpasset sig sine langsigtsværdier givet disse eksogene størrelse; dette indebærer konkret en omkostningsandel, s_K^*, på ca. 0.15. Med de givne parameterestimater og faktorpriser er $\underline{K}$ meget lille for estimationen VII (med σ=0.50, $\underline{K}$ udgør ca. 15% af K^*), mens $\underline{K}$ udgør ca. 70% af K^* for estimationerne I og IV (med fri σ =(0.11-0.14). I grundkørslen er de tidsafhængige effektivitetsindeks konstante.

Effekten på L^+ og K af at øge Y 1% er beregnet på den beskrevne grundkørsel, der altså er karakteriseret af ligevægt med udgangspunkt i 1990-værdierne for de eksogene variabler. Multiplikatorerne er vist i figur 4a nedenfor. Herudover er effekterne beregnet på grundlag af en grundkørsel, hvor K kunstigt er holdt 20% under det langsigtede niveau for K^* (vha. et j-led i investeringsligningen), jf. figur 4b.[4]

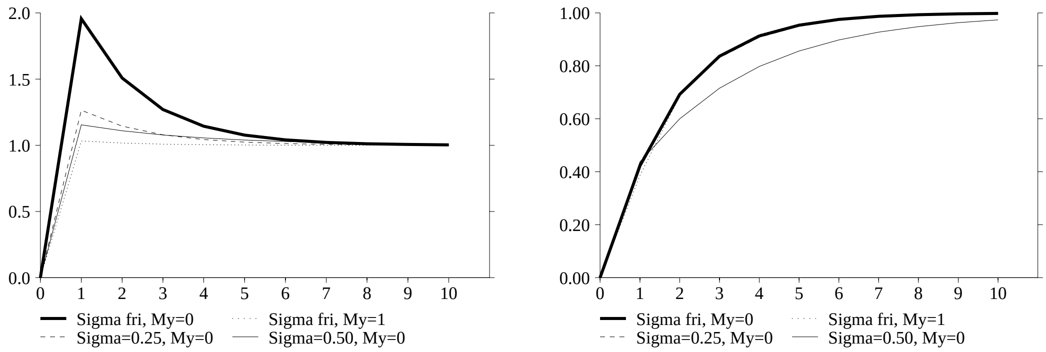
Figur 4a. Effekt af at øge *Y* 1%, fra K=K^*.

Effekt på L^+ **Effekt på *K***



Figur 4b. Effekt af at øge *Y* 1%, fra K=0.8·K^*.

Effekt på L^+ **Effekt på *K***



Det fremgår, at effekten på L^+ som forventeligt er mindst i estimation IV, dvs. med μ=1 (og σ frit estimeret). Udnyttelseseffekterne i dette tilfælde gør, at det effektive kapitalapparat, $\hat{K}$, øges mere end det fysiske, hvorfor L^+ ikke behøver stige så meget. For multiplikatorerne beregnet med udgangspunkt i K=K^* er effekterne for de øvrige estimationer ikke til at skelne fra hinanden. Med K=0.8·K^* i grundkørslen er effekten klart størst med σ fri (=0.14) (og μ=0), hvilket er helt forventeligt. Ser man på effekterne på *K*, fremgår det, dels at multiplikatorerne for praktiske formål er uafhængige af grundkørslen, dels at kun estimationen med σ=0.50 skiller sig ud med en lidt langsommere tilpasning (også jf. tabel 4). Sammenlignes effekterne med de stiliserede multiplikatorer i figur 1 (σ=0.15) fremgår det, at effekterne i figur 4a/4b er mindre; baggrunden herfor er primært, at den estimerede første årseffekt på *K* (koefficienten til Dlog(K^*), γ_{1K}, i (2)) er noget større jf. tabel 4 (omkring 0.4) end

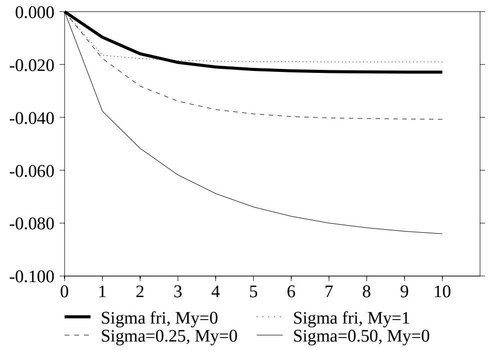
[4]Helt tilsvarende effekter kunne opnås, hvis der i stedet for et j-led eksempelvis var indlagt en konstant vækstrate i *Y*; herved ville *K* som følge af fejlkorrektionsspecifikationen af investeringsligningen halte efter K^*.

svarende til figur 1 eller tabel 3 (0.3).

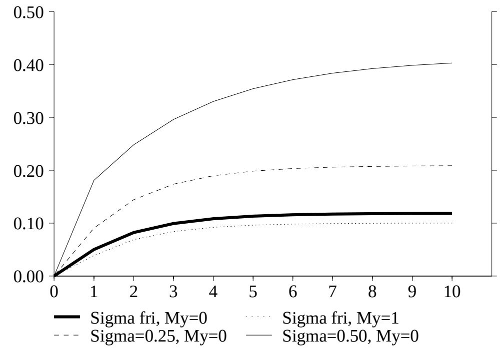
I nedenstående figur er effekten af at øge lønnen 1% vist:

Figur 5a. Effekt af at øge lønnen 1%, fra K=K^*.

Effekt på L^+



Effekt på K

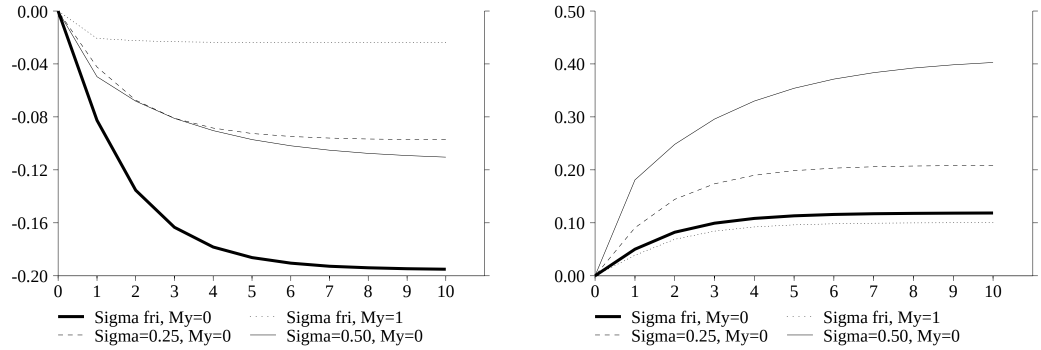


Det ses, at i modsætning til multiplikatorer for en ændring i Y, så afhænger langsigtsegenskaberne ved en ændring i de relative faktorpriser af den konkrete estimation; for produktionsmultiplikatorerne er langsigtseffekten jo bundet til 1 som følge af antagelsen om konstant skala-afkast og betydning af restriktioner på σ og eller anvendelsen af udnyttelseseffekter kan derfor – om overhovedet – kun have betydning på kort sigt. Den størrelsesmæssige rangordning af multiplikatorerne for en ændring i de relative faktorpriser følger som forventeligt den estimerede værdi af σ; effekten i de to estimationer med frit estimeret σ (på hhv. 0.11 og 0.14) er næsten sammenfaldende både for så vidt angår effekten på L^+ og effekten på K.

Endelig vises effekten af at øge lønnen 1% fra en udgangssituation, hvor K=0.8·K^*. Det skal præciseres, at K er holdt under K^* igennem hele grundforløbet, hvilket bl.a indebærer, at L^+/L^*-forholdet permanent er over 1 (også jf. figur 3).

Figur 5b. Effekt af at øge lønnen 1%, fra K=0.8·K^*.

Effekt på L^+ **Effekt på K**



For så vidt angår effekten på K følger rangordningen af multiplikatorer også her den estimerede værdi af σ, mens dette *ikke* er tilfældet for effekten på L^+. Måske lidt overraskende er effekten på L^+ størst i tilfældet med frit estimeret σ og uden udnyttelseseffekter, jf. den fede kurve. Bag dette ligger to modsat-rettede effekter: Den ret lave σ (0.11) trækker i retning af en lille effekt af at ændre en faktorpris. I den anden retning trækker imidlertid, at K i udgangs-punktet er meget tæt på $\underline{K}$ (der, som nævnt, udgør omkring 0.70% af K^*). Da K i udgangspunktet således blot er knap 10% over sit absolutte minimum kræves (i fravær af udnyttelseseffekter) en relativt stor ændring i L^+. Tillades udnyttelseseffekter, dvs. μ=1 (og næsten den samme (frit estimerede) lave σ), fås, jf. den stiplede linie, det "forventede" resultat, nemlig en meget lille effekt af at ændre en faktorpris. Det skal for ordens skyld bemærkes, at effekten på L^* – naturligvis – er væsentlig mindre med σ frit estimeret (0.11) end med σ=0.50. Effekterne på L^*, K^* (og K) fremgår af tabel 4.

4. Afslutning

Umiddelbart kan det forekomme overraskende, at introduktionen af det udnyttelseskorrigerede kapitalapparat på én gang har stor betydning for model-egenskaberne (jf. fx tabellerne 1-3) og samtidig for alle praktisk formål ikke har konsekvenser for estimationsresultaterne (jf. tabel 4). Baggrunden for dette må imidlertid ganske enkelt være, at vi i estimationsperioden ikke har været der ude, hvor de kraftige ikke-lineariteter, der er til stede i fravær af udnyttelses-effekter, sætter ind; i kodesprog har K over hele perioden været tilstrækkelig stor i forhold til $\underline{K}$ – i hvert fald i det betragtede *xx*-erhverv. Derfor er estimationen ikke i stand til at skelne mellem specifikationer med hhv. uden udnyttelseseffekter. Betydningen for modelegenskaberne er derfor at betragte som en slags "ekstrapolation" i forhold til de observerede sammenhænge.

I valget af, om "L^+-problemet" skal løses ved at binde σ eller ved at introducere $\hat{K}$, er det væsentligt at være opmærksom på, at mens den sidste løsning principielt kun påvirker kortsigtsegenskaberne (bortset fra når effekterne beregnes ude af ligevægt, jf. figur 5b), så er restriktioner på σ af betydning også for langsigtsegenskaberne, nemlig i forbindelse med faktorprisændringer. Muligvis ligger et brudstykke til en afklaring i en nærmere analyse af dynamikken i *K*-ligningen. Det er således bemærkelsesværdigt, at restriktioner på σ væsentligst påvirker *K*-ligningen samtidig med, at dynamikken i denne ligning tilsyneladende halter (jf. den lave DW-værdi). Ideelt kan man håbe, at en ændret dynamisk tilpasning i *K*-ligningen – der bl.a. inddrager den kraftige ikke-linearitet, der ligger i hele L^+-problemet – kan "slå to fluer med et smæk", nemlig dels løse L^+-problemet (fx gennem en hurtigere tilpasning af kapitalapparatet i de kritiske situationer), dels reducere autokorrelationsproblemerne i *K*-ligningen.

Med hensyn til det udnyttelseskorrigere kapitalapparat kan de implicerede effekter på kapitalapparatets effektivitet – fx med de i bilaget foreslåede funktionsformer for $\hat{K}$ – blive af en fortolkelig størrelsesorden. Tolkningen af effekterne som ledig kapital forekommer rimelig. Da effekterne stort set kan blive af den ønskede størrelsesorden – herunder om ønskeligt i praksis blive ikke-eksisterende i en (betydelig) omegn omkring K=K^* – kan det argumenteres, at spørgsmålet mere bliver *hvilken* funktionsform for $\hat{K}$, der skal anvendes, snarere end *om* $\hat{K}$ skal anvendes. Da $\hat{K}$-konstruktionen, jf. bilaget, kan gives mange iklædninger, bidrager dette postulat dog ikke meget til en afklaring.

Argumentet for at lægge restriktioner på σ fremfor at anvende $\hat{K}$ er primært, at der så ikke "snydes på vægten". Effektivitetseffekten, der ligger i $\hat{K}$-konstruktionen kan i virkelighedens verden ikke opfattes som gratis; det må være forbundet med omkostninger at kunne spare på *L*, sådan som $\hat{K}$ lægger op til. Man kan sige, at CES-funktionens egenskaber bliver undertrykt der, hvor det virkelig er interessant – nemlig "ude ad asymptoterne". Argumentet imod restriktioner på σ er, at vi ikke ved, hvad vi skal binde substitutionselasticiteten til, og at det naturligvis er uheldigt ikke at kunne estimere den allermest interessante parameter i CES-funktionen; under alle omstændigheder må det dog erkendes, at informationen om denne størrelse er begrænset, jf. den store spredning på σ-estimatet.

Bilag 1. Forskellige udtryk for udnyttelseskorrigeret kapitalapparat

I dette bilag fremlægges 3 forskellige udtryk for det udnyttelseskorrigeret kapitalapparat, $\hat{K}$, og der redegøres for deres principielle egenskaber.

Udgangspunktet for udtrykket for $\hat{K}$ er,

$\hat{K}$	=	K	for K=K^*
$\hat{K}$	=	$\underline{K}$	for K=0
d($\hat{K}$)/dK	>	0	

Disse restriktioner sikrer, at L^+ altid eksisterer for alle $K\geq 0$, og at der ikke er nogen udnyttelseseffekter på langt sigt (K=K^*).

Forslaget, der blev bragt i det tidligere nævnte modelgruppepapir, og som har været anvendt her, er:

$$\hat{K} = \frac{K - (1-\mu)\underline{K}}{K^* - (1-\mu)\underline{K}} \left[K^* - \underline{K}\right] + \underline{K} \tag{a.1}$$

For μ=1 overholder denne funktionsform de nævnte restriktioner, mens μ<1 kun sikrer eksistensen af L^+, når K ikke er "for" lille.

Som en tiltalende, alternativ konstruktion kunne overvejes følgende transformation af K:

$$\hat{K} = K \cdot \sqrt{1 + \left(\frac{\underline{K}}{K}\right)^2 - \left(\frac{\underline{K}}{K^*}\right)^2} \tag{a.2}$$

der også overholder de nævnte restriktioner for $K\geq 0$. Funktionen kan om ønskeligt gøres mere generel ved, at potensen i (a.2) – "2" – gøres til en parameter, γ:

$$\hat{K} = K \cdot \left(1 + \left(\frac{\underline{K}}{K}\right)^\gamma - \left(\frac{\underline{K}}{K^*}\right)^\gamma\right)^{\frac{1}{\gamma}} \tag{a.2'}$$

Jo større γ sættes, jo mere mindre "effektivitetseffekt" vil transformationen indebære i omegnen af K=K^*. Som special-tilfælde kan man i øvrigt få (a.1) med μ=1 ved at sætte γ=1.

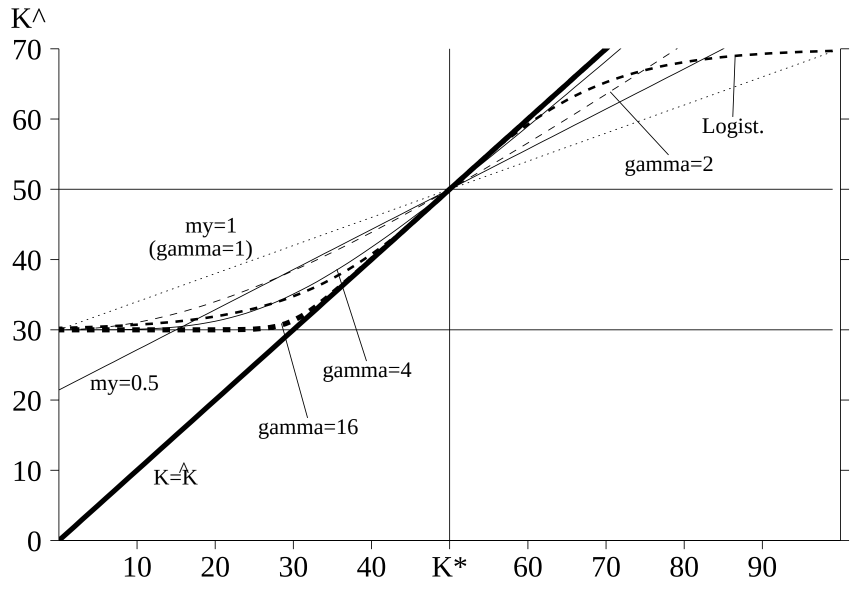
En sidste mulig funktionsform, der skal nævnes her, er den logistiske:

$$\hat{K} = \underline{K} + \frac{2\left(K^* - \underline{K}\right)}{1 + \exp\left(\frac{2\left(K^* - K\right)}{K^* - \underline{K}}\right)} \tag{a.3}$$

Den logistiske transformation overholder også de 3 nævnte restriktioner, der bl.a. sikrer eksistensen af L^+ for alle positive K. Herudover udmærker funktionsformen sig ved, at den har hældning lig 45° i K=K^*. Dette indebærer, at kapitalapparatet – i modsætning til alle de øvrige transformationer – bliver hverken mere eller mindre effektivt, når K^* ændres fra en ligevægtssituation (jf. tabel A2 nedenfor). En anden speciel egenskab ved den logistiske kurve frem for de øvrige, er, at den har vandret asymptote, når K bliver meget stor. Tolkningen af dette kan være, at når man har ekstremt meget K, så vil en yderligere forøgelse ikke øge den reelt brugbare mængde kapital (og man kan derfor ikke spare yderligere på arbejdskraften). Denne form for "aftagende marginalprodukt" vil komme i tillæg til den, der følger af produktions-(CES)-funktionens egenskaber og vil derfor i praksis ikke have væsentlig betydning for L^+ (jf. tabel A2 nedenfor).

Nedenstående graf viser, hvorledes de viste funktionsformer fungerer. Der henvises til det tidligere nævnte modelgruppepapir for introduktion til denne graf. Her skal blot erindres, at små σ'er svarer til, at den vandrette $\underline{K}$-linie ligger tæt på K^*-linien. I øvrigt bemærkes, at størrelsesordenen af udnyttelses-effekterne rent grafisk kan aflæses som forskellen mellem hældningen på $\hat{K}$-kurven og 45°-linien – jo fladere $\hat{K}$-kurven er, jo større er den implicerede udnyttelseseffekt (sammenlign evt. grafen med omstående tabel A1).

Figur A1. Funktionsformer for $\hat{K}$



I figuren er K^*=50, og $\underline{K}$ = 30, hvilket svarer nogenlunde til σ=0.25 og s_K^*=0.25. Den fede 45°-linie, $K=\hat{K}$, svarer til, at der ikke er nogen udnyttelses-effekter; de øvrige kurver viser, hvorledes K på forskellig vis kan transformeres til et udnyttelseskorrigeret $\hat{K}$. Det fremgår, at alle transformationerne overholder $\hat{K}=K$, for $K=K^*$.

Den prikkede kurve, *my=1 (gamma=1)*, svarer til den nuværende $\hat{K}$-konstruktion, dvs. transformation vha. (a1) med μ=1 (eller ekvivalent vha. (a2') med γ=1). Denne kurve er den, der har de kraftigste effektivitetseffekter i omegnen af $K=K^*$, hvilket grafisk fremgår ved, at denne kurve har en hældning, der er væsentlig forskellig fra 45°-linien; se evt. også omstående tabel A1.

Den rette linie *my=0.5* svarer til transformation vha. (a1) med μ=0.5. De implicerede udnyttelseseffekter er her mindre end med μ=1, også jf. tabel A1; da $\hat{K}$-linien skærer $\underline{K}$ vil faktorefterspørgselsmodellen bryde sammen (for K<15 (=30% af K^*)).

De tre krumme kurver viser transformationen vha. (a2') med γ lig 2, 4 hhv. 16. Det fremgår, at γ=2 i omegnen af $K=K^*$ svarer nogenlunde til *my=0.5*-kurven, mens γ=4 er stejlere i dette område – svarende til mindre effektivitetseffekter (også jf. nedenstående tabel A1). Funktionsformen (a2') indebærer, at jo højere γ sættes jo mere vil $\hat{K}$-kurven "knække": I grænsen for γ gående mod uendelig vil $\hat{K}$-kurven følge $\hat{K}=K$-linien for $K>\underline{K}$, og $\hat{K}=\underline{K}$ for $K<\underline{K}$. Det fremgår af den fede stiplede kurve, at dette for alle praktiske formål sker med γ = 16.

Endelig er der i grafen indtegnet den logistiske kurve svarende til transformationen (a3). Det fremgår, at denne kurve er næsten sammenfaldende med 45°-linien omkring $K=K^*$. I modsætning til alle de øvrige har denne kurve en vandret asymptote, når K bliver meget stor (= $K^*+(K^*–\underline{K})$).

I omstående tabel A1 er effekten på $\hat{K}$ og L^+ af at øge Y 1% beregnet. Tabellen kan umiddelbart sammenlignes med tabellerne 1-3 i papiret.

Tabel A1 underbygger kommentarerne til grafen, og det fremgår, at jo større effektivitetseffekten er, jo mindre bliver effekten på L^+ – naturligvis. Det fremgår endvidere, at ligheden mellem den logistiske funktionsform og den eksponentielle med γ=4 hhv. mellem den lineære med μ=.50 og den eksponentielle med γ=2 er meget klar i et ret stort interval omkring K^*, jf tabellens dækning af intervallet 0.7-1.1 gange K^*. Det kan i øvrigt bemærkes, at $\underline{K}$ i eksemplet udgør ca. 63% af K^*; som det fremgår af tabellen, er udnyttelses-effekterne for γ=16 for praktiske formål fraværende, selv for $K=0.7 \cdot K^*$, hvilket blot er udtryk for, at $\hat{K}$ følger 45°-linien, næsten helt ned til $\underline{K}$.

Tabel A1. Effekt på $\hat{K}$ og L^+ af at øge Y 1%.

$\hat{K}$-transformation		K=0.7· K^*	K=0.8· K^*	K=0.9· K^*	K=K^*	K=1.1· K^*
		Effekt på $\hat{K}$ for fastholdt K				
Lineær (a1)	My=0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00
	My=0.50	0.53	0.52	0.49	0.46	0.44
	My=1.00	0.69	0.68	0.65	0.63	0.61
Eksponentiel (a2')	Gamma=2	0.54	0.51	0.45	0.40	0.35
	Gamma=4	0.37	0.32	0.22	0.16	0.11
	Gamma=16	0.06	0.02	0.00	0.00	0.00
Logistisk (a3)		0.38	0.27	0.08	0.00	0.06
		Effekt på L^+ – K reagerer 0.3 på ændring i K^*				
Lineær (a1)	My=0.00	2.06	1.69	1.37	1.24	1.16
	My=0.50	1.21	1.19	1.15	1.13	1.11
	My=1.00	1.11	1.10	1.09	1.09	1.08
Eksponentiel (a2')	Gamma=2	1.21	1.20	1.17	1.14	1.12
	Gamma=4	1.41	1.35	1.26	1.20	1.15
	Gamma=16	1.96	1.67	1.37	1.24	1.16
Logistisk		1.49	1.44	1.34	1.24	1.16

Anm. Effekterne er beregnet med σ=0.25 og s_K^*=0.25, hvilket svarer til figuren.
Lavere σ og/eller højere s_K^* vil give anledning til større effektivitetseffekter (og mindre effekter på L^+), evt. jf. papirets tabel 1 og 2.

Betydningen af de forskellige $\hat{K}$-konstruktioner kan alternativt anskueliggøres ved at beregne effekten på $\hat{K}$ hhv. L^+ af at øge K eksogent:

Tabel A2. Effekt på $\hat{K}$ og L^+ af at øge K eksogent 1%

$\hat{K}$-transformation		K=0.8· K^*	K=K^*	K=1.5· K^*
		Effekt på $\hat{K}$		
Lineær (a1)	My=0.00	1.00	1.00	1.00
	My=0.50	0.48	0.54	0.64
	My=1.00	0.32	0.37	0.47
Eksponentiel (a2')	Gamma=2	0.49	0.60	0.77
	Gamma=4	0.69	0.84	0.96
	Gamma=16	0.98	1.00	1.00
Logistisk (a3)		0.75	1.00	0.25
		Effekt på L^+		
Lineær (a1)	My=0.00	–0.92	–0.32	–0.08
	My=0.50	–0.26	–0.18	–0.09
	My=1.00	–0.15	–0.12	–0.08
Eksponentiel (a2')	Gamma=2	–0.27	–0.20	–0.09
	Gamma=4	–0.49	–0.28	–0.08
	Gamma=16	–0.89	–0.32	–0.08
Logistisk		–0.61	–0.32	–0.03

Anm. Effekterne er beregnet med σ=0.25 og s_K^*=0.25, hvilket svarer til figuren.

De marginale udnyttelseseffekter fremgår af tabel A2 ved, at $\hat{K}$ øges mindre end K. Generelt er udnyttelseseffekterne størst for K<K^*. Effekten, når K=0.8·K^* og μ=1 er, som det fremgår, meget stor: $\hat{K}$ øges således kun med 1/3%, når K øges med 1%, hvilket betyder, at den potentielle besparelse på L er ret begrænset.

Udnyttelseseffekternes betydning for effekten på L^+ er stærkt begrænset, når K>>K^*. Da besparelsen under alle omstændigheder er meget lille (fordi K er rigelig) betyder det reelt ikke noget om, man anvender udnyttelseskorrektion eller ej – og om man i givet fald anvender den logistiske transformation (med vandret asympote) eller fx (a2').

Det fremgår i øvrigt tydeligt, at γ=16 for praktiske formål svarer til μ=0, dvs. ingen udnyttelseseffekter. Det bekræftes også af tabellen, at den marginale udnyttelseseffekt omkring K=K^* ikke alene er nul for μ=0 (naturligvis), men også for γ=16 samt den logististiske transformation.

Med udgangspunkt i figuren og tabellerne må man ret entydigt foretrække (a2') (eller (a3)) frem for den lineære (a1). De to førstnævnte sikrer eksistensen af L^+ uafhængigt af parametre, og de indebærer ikke de meget kraftige effektivitetseffekter, der kan følge af (a1) (med μ=1). Man kan lidt groft skitsere tre muligheder:

a) Udnyttelseseffekter i kapitalapparatet er generelt uønskede. Det matematiske problem med sammenbrud, når K bliver mindre end $\underline{K}$, ønskes løst, så det påvirker modellen mindst muligt.

b) Udnyttelseseffekter ønskes ikke i en omegn af K^* – hverken i niveau eller marginalt. For K væsentlig forskellig fra K^* er udnyttelseseffekter, fx tolket som ledig kapital, dog acceptable (eller endog ønskelige).

c) Variabel kapacitetsudnyttelse svarende til, at der er ledig kapital, opfattes som en fortolkelig og ønskelig egenskab. Marginale udnyttelseseffekter er til stede også for K=K^*, men de er relativt små i omegnen af heraf og for K>K^*

Den funktionsform, der ligger lige for, hvis a) beskriver præferencerne, er (a2') med en meget høj γ (fx 16); som nævnt vil denne funktionsform for høje værdier af γ for praktiske formål ikke kunne skelnes fra den knækkede linie: $\hat{K}$=K for K>$\underline{K}$ og $\hat{K}$=$\underline{K}$ ellers. Alternativet er at binde substitutionselasticiteten.

Er b) en mere korrekt beskrivelse bør (a3) eller (a2') med en relativ høj værdi af γ (fx 4) vælges. Umiddelbart er det vanskeligt at se gode argumenter for den logistiske transformation (a3).

Endelig lægger fremstillingen i c) – dvs. at introduktionen af ledig kapital ikke blot skal opfattes som et nødvendigt onde – op til brugen af (a2') med en mere begrænset værdi af γ fx 2. Det vil næppe være relevant at lade γ være en styrbar parameter i modellen.