Danmarks Statistik
MODELGRUPPEN

Arbejdspapir*

Asger Olsen
Jakob Hald

24. maj 1993

CES omkostningsfunktioner på kort og langt sigt

Resumé:

I papiret gennemregnes sammenhængen mellem minimumsomkostningsfunktioner på kort og langt sigt i de relativt simple Cobb-Douglas og CES tilfælde. Papiret indeholder beregninger, der i bøgerne springes over som "tedious manipulations", og er oprindeligt skrevet til egen opbyggelse, men det kan måske have en bredere interesse til opslagsbrug.

Hovedresultatet er, ikke uventet, at forholdet mellem omkostningerne på kort og langt sigt primært er en funktion af forholdet mellem faktisk og ønsket kapitalapparat, ($K/K^{ø}$). For $K=K^{ø}$ er kort- og langsigtsomkostningerne sammenfaldende, og dette gælder vel at mærke både gennemsnits- og marginalomkostninger.

---

cdces.jao

Nøgleord: Cobb-Douglas CES omkostningsfunktion

1. Cobb-Douglas Omkostningsfunktioner

1.1. Langt sigt

Problem: Minimer $c(w,u,q,L,K,M) = wL + qM + uK$
over L,K,M under $y = \alpha L^{\beta} M^{\delta} K^{\gamma}$

Lagrangefunktion: $\mathcal{L} = wL + qM + uK + \mu^*(y - \alpha L^{\beta} M^{\delta} K^{\gamma})$

$$\partial\mathcal{L}/\partial L = w - \mu^*\beta\alpha L^{\beta-1}M^{\delta}K^{\gamma} = w - \mu^*\beta y/L = 0 \quad \Leftrightarrow L^* = \mu^*\beta y/w$$
$$\partial\mathcal{L}/\partial M = q - \mu^*\beta\alpha L^{\beta}M^{\delta-1}K^{\gamma} = q - \mu^*\delta y/M = 0 \quad \Leftrightarrow M^* = \mu^*\delta y/q$$
$$\partial\mathcal{L}/\partial K = u - \mu^*\gamma\alpha L^{\beta}M^{\delta}K^{\gamma-1} = u - \mu^*\gamma y/K = 0 \quad \Leftrightarrow K^* = \mu^*\gamma y/u$$
$$\partial\mathcal{L}/\partial \mu^* = y - \alpha L^{\beta}M^{\delta}K^{\gamma} = 0$$

Det ses umiddelbart, at fx

$$\frac{L^*}{K^*} = \frac{u/\gamma}{w/\beta}$$

(dvs. at det optimale faktorforhold er lig med de produktivitetskorrigerede aflønninger).

Vi har

$$y = \alpha(\frac{\mu^*\beta y}{w})^{\beta}(\frac{\mu^*\delta y}{q})^{\delta}(\frac{\mu^*\gamma y}{u})^{\gamma}$$

$\Leftrightarrow$

$$y = \alpha(\mu^* y)^{\beta+\delta+\gamma}(\frac{\beta}{w})^{\beta}(\frac{\delta}{q})^{\delta}(\frac{\gamma}{u})^{\gamma}$$

$\Leftrightarrow$

$$\mu^* = y^{-1}[(\frac{y}{\alpha})(\frac{w}{\beta})^{\beta}(\frac{q}{\delta})^{\delta}(\frac{u}{\gamma})^{\gamma}]^{\frac{1}{\beta+\delta+\gamma}}$$

($\beta+\delta+\gamma$ er homogenitetsgraden).

Det optimale kapitalapparat er således

$$K^* = \mu^* y\frac{\gamma}{u} = \frac{\gamma}{u}[(\frac{y}{\alpha})(\frac{w}{\beta})^{\beta}(\frac{q}{\delta})^{\delta}(\frac{u}{\gamma})^{\gamma}]^{\frac{1}{\beta+\delta+\gamma}}$$

(og tilsvarende for L^* og M^*)

Minimumomkostningsfunktionen bliver

$C^*(y,w,q,u) = wL^*+qM^*+uK^* = \mu^*\beta y + \mu^*\delta y + \mu^*\gamma y = \mu^* y(\beta+\delta+\gamma)$

Bemærk, at $\partial C^*/\partial y = \mu^*$, dvs. at Lagrangemultiplikatoren μ^* kan tolkes som de optimale marginalomkostninger. Desuden er

$$\mu^* = \frac{C^*(y,w,q,u)}{y} \cdot \frac{1}{\beta+\delta+\gamma}$$

altså, at μ^* også kan skrives som enhedsomkostningerne, korrigeret for skalaafkastet.

Hvis der er konstant skalaafkast, dvs at $\beta+\delta+\gamma=1$, er de optimale marginalomkostninger μ^* konstante og lig med de optimale enhedsomkostninger:

$$\mu^* = \alpha^{-1}(\frac{w}{\beta})^{\beta}(\frac{q}{\delta})^{\delta}(\frac{u}{\gamma})^{\gamma} = \frac{C^*(y,w,q,u)}{y} = konstant$$

Det optimale kapitalapparat er, stadig under konstant skalaafkast,

$$K^* = y\alpha^{-1}(\frac{w}{\beta})^{\beta}(\frac{q}{\delta})^{\delta}(\frac{u}{\gamma})^{\gamma-1} = C^*(y,w,q,u)\cdot\frac{\gamma}{u}$$

1.2. Kort sigt

På kort sigt er K given. Problemet er herefter:

Problem: Minimer $c(w,u,q,L,K,M) = wL + qM + uK$
over L,M under $y = \alpha L^{\beta}M^{\delta}K^{\gamma}$

Lagrangefunktion: $\mathfrak{L} = wL + qM + uK + \mu(y - \alpha L^{\beta}M^{\delta}K^{\gamma})$

$\partial\mathfrak{L}/\partial L = w - \mu\beta\alpha L^{\beta-1}M^{\delta}K^{\gamma} = w - \mu\beta y/L \Leftrightarrow L^+ = \mu\beta y/w$
$\partial\mathfrak{L}/\partial M = q - \mu\beta\alpha L^{\beta}M^{\delta-1}K^{\gamma} = q - \mu\delta y/M \Leftrightarrow M^+ = \mu\delta y/q$
$\partial\mathfrak{L}/\partial\mu = y - \alpha L^{\beta}M^{\delta}K^{\gamma} = 0$

idet toptegnet $^+$ bruges til at angive de optimale værdier på kort sigt.

Det ses umiddelbart, at for de variable faktorer gælder stadig:

$$\frac{L^+}{M^+} = \frac{q/\delta}{w/\beta}$$

samt at sammenhængen mellem efterspørgslen efter variable produktionsfaktorer på kort og langt sigt er

$$\frac{L^{+}}{L^{*}} = \frac{M^{+}}{M^{*}} = \frac{\mu}{\mu^{*}}$$

Vi har

$$y = \alpha\left(\frac{\mu\beta y}{w}\right)^{\beta}\left(\frac{\mu\delta y}{q}\right)^{\delta}K^{\gamma}$$

⇔

$$y = \alpha\mu^{\beta+\delta}y^{\beta+\delta}\left(\frac{\beta}{w}\right)^{\beta}\left(\frac{\delta}{q}\right)^{\delta}K^{\gamma}$$

⇔

$$\mu = y^{-1}\left[\left(\frac{y}{\alpha}\right)\left(\frac{w}{\beta}\right)^{\beta}\left(\frac{q}{\delta}\right)^{\delta}K^{-\gamma}\right]^{\frac{1}{\beta+\delta}}$$

Den optimale arbejdskraftefterspørgsel på kort sigt er således

$$L^{+} = \mu y\frac{\beta}{w} = \frac{\beta}{w}\left[\left(\frac{y}{\alpha}\right)\left(\frac{w}{\beta}\right)^{\beta}\left(\frac{q}{\delta}\right)^{\delta}K^{-\gamma}\right]^{\frac{1}{\beta+\delta}}$$

Kortsigtsminimumomkostningsfunktionen bliver således

$SC^{*}(y,w,q,u,K) = wL^{+}+qM^{+}+uK = \mu\beta y + \mu\delta y + uK = \mu y(\beta+\delta) + uK$

dvs at

$$\mu = \frac{SC^{*}(y,w,q,u,K)-uK}{y}\cdot\frac{1}{\beta+\delta}$$

altså, at μ er lig med de *variable* enhedsomkostninger, opskaleret med faktoren $1/(\beta+\delta)$.

Det ses, at de optimale *kortsigtsmarginalomkostninger* er

$SMC^{*} = \partial SC^{*}/\partial y = \mu$.

1.3 Sammenhængen mellem kort og langt sigt

Marginalomkostningerne på kort sigt kan skrives

$$\mu = y^{-1}[(\frac{y}{\alpha})(\frac{w}{\beta})^{\beta}(\frac{q}{\delta})^{\delta}]^{\frac{1}{\beta+\delta}}(K\frac{u}{\gamma})^{-\frac{\gamma}{\beta+\delta}}(\frac{u}{\gamma})^{\frac{\gamma}{\beta+\delta}}$$

$$\mu = y^{-1}(\mu^{*}y)^{\frac{\beta+\delta+\gamma}{\beta+\delta}}(K\frac{u}{\gamma})^{-\frac{\gamma}{\beta+\delta}}$$

$$\mu = \mu^{*(1+\frac{\gamma}{\beta+\delta})}(\frac{K}{y}\frac{u}{\gamma})^{-\frac{\gamma}{\beta+\delta}}$$

Forholdet mellem marginalomkostningerne på kort og langt sigt er således

$$\frac{\mu}{\mu^{*}} = (\mu^{*}\frac{y}{K}\frac{\gamma}{u})^{\frac{\gamma}{\beta+\delta}} = (\frac{K^{*}}{K})^{\frac{\gamma}{\beta+\delta}}$$

dvs en funktion af K/y forholdet, eller af forholdet K^*/K, alt efter smag.

Forholdet mellem arbejdskraftefterspørgselen på kort sigt, $L^+=\mu y\beta/w$, og den optimale arbejdskraftefterspørgsel, $L^*=\mu^* y\beta/w$, er således også

$$\frac{L^{+}}{L^{*}} = \frac{\mu}{\mu^{*}} = (\frac{K^{*}}{K})^{\frac{\gamma}{\beta+\delta}}$$

Det følger trivielt, at for $K=K^*$ er:

$\mu = \mu^* \Leftrightarrow \partial SC^*(y,w,q,u,K^*)/\partial y = \partial C^*(y,w,q,u)/\partial y$
$L^+ = L^*$
$M^+ = M^*$

og at

$\min_K\{SC^*(y,w,q,u,K)\} = SC^*(y,w,q,u,K^*) = C^*(y,w,q,u)$

2. CES omkostningsfunktioner

2.1. Langt sigt

Problem: Minimer $c(w,u,q,L,K,M) = wL + qM + uK$
over L,K,M under $y = \alpha(\beta L^{-\varrho} + \gamma K^{-\varrho} + \delta M^{-\varrho})^{-\lambda/\varrho}$

hvor $\beta+\gamma+\delta=1$. Parameteren λ er homogenitetsgraden (normalt=1).

Lagrangefunktion: $\mathfrak{L} = wL + qM + uK - \mu^* [y - \alpha(\beta L^{-\varrho} + \gamma K^{-\varrho} + \delta M^{-\varrho})^{-\lambda/\varrho}]$

$$\partial\mathfrak{L}/\partial L = w - \mu^*\lambda y^{(1+\varrho/\lambda)}\alpha^{-\varrho/\lambda}\beta L^{-(1+\varrho)} = 0$$
$$\partial\mathfrak{L}/\partial M = q - \mu^*\lambda y^{(1+\varrho/\lambda)}\alpha^{-\varrho/\lambda}\delta M^{-(1+\varrho)} = 0$$
$$\partial\mathfrak{L}/\partial K = u - \mu^*\lambda y^{(1+\varrho/\lambda)}\alpha^{-\varrho/\lambda}\gamma K^{-(1+\varrho)} = 0$$
$$\partial\mathfrak{L}/\partial \mu^* = y - \alpha(\beta L^{-\varrho} + \gamma K^{-\varrho} + \delta M^{-\varrho})^{-\lambda/\varrho} = 0$$

hvoraf de optimale faktorefterspørgsler er

$$L^* = [\mu^*\lambda y \frac{y}{\alpha}^{\frac{\varrho}{\lambda}} \frac{\beta}{w}]^{\frac{1}{1+\varrho}}$$

$$M^* = [\mu^*\lambda y \frac{y}{\alpha}^{\frac{\varrho}{\lambda}} \frac{\delta}{q}]^{\frac{1}{1+\varrho}}$$

$$K^* = [\mu^*\lambda y \frac{y}{\alpha}^{\frac{\varrho}{\lambda}} \frac{\gamma}{u}]^{\frac{1}{1+\varrho}}$$

Det ses umiddelbart, at de optimale faktorforhold er fx

$$\frac{L^*}{M^*} = (\frac{q/\delta}{w/\beta})^{\frac{1}{1+\varrho}}$$

(Jf. Cobb-Douglas funktionen, som klart ses at være et specialtilfælde).

Lagrangemultiplikatoren μ^* bestemmes af

$$y = \alpha(\beta L^{*-\varrho} + \gamma K^{*-\varrho} + \delta M^{*-\varrho})^{-\lambda/\varrho}$$

$\Leftrightarrow$

$$y = \alpha[(\mu^*\lambda y \frac{y}{\alpha}^{\frac{\varrho}{\lambda}})^{-\frac{\varrho}{1+\varrho}}[\beta(\frac{\beta}{w})^{-\frac{\varrho}{1+\varrho}} + \delta(\frac{\delta}{q})^{-\frac{\varrho}{1+\varrho}} + \gamma(\frac{\gamma}{u})^{-\frac{\varrho}{1+\varrho}}]]^{-\frac{\lambda}{\varrho}}$$

$\Leftrightarrow$

$$y = (\mu^* \lambda y \frac{y}{\alpha}^{\frac{\varrho}{\lambda}})^{\frac{\lambda}{1+\varrho}} [\beta(\frac{w}{\beta})^{\frac{\varrho}{1+\varrho}} + \delta(\frac{q}{\delta})^{\frac{\varrho}{1+\varrho}} + \gamma(\frac{u}{\gamma})^{\frac{\varrho}{1+\varrho}}]^{-\frac{\lambda}{\varrho}}$$

hvoraf vi finder μ^*:

$$\mu^* = y^{-1}\lambda^{-1}(\frac{y}{\alpha})^{\frac{1}{\lambda}} [\beta(\frac{w}{\beta})^{\frac{\varrho}{1+\varrho}} + \delta(\frac{q}{\delta})^{\frac{\varrho}{1+\varrho}} + \gamma(\frac{u}{\gamma})^{\frac{\varrho}{1+\varrho}}]^{\frac{1+\varrho}{\varrho}}$$

eller, formuleret ved hjælp af substitutionselasticiteten $\sigma=1/(1+\varrho)$.[1]

$$\mu^* = y^{-1}\lambda^{-1}(\frac{y}{\alpha})^{\frac{1}{\lambda}} [\beta(\frac{w}{\beta})^{1-\sigma} + \delta(\frac{q}{\delta})^{1-\sigma} + \gamma(\frac{u}{\gamma})^{1-\sigma}]^{\frac{1}{1-\sigma}}$$

De optimale faktorefterspørgsler bliver

$$L^* = (\frac{w}{\beta})^{-\sigma}(\frac{y}{\alpha})^{\frac{1}{\lambda}} [\beta(\frac{w}{\beta})^{1-\sigma} + \delta(\frac{q}{\delta})^{1-\sigma} + \gamma(\frac{u}{\gamma})^{1-\sigma}]^{\frac{\sigma}{1-\sigma}}$$

$$M^* = (\frac{q}{\delta})^{-\sigma}(\frac{y}{\alpha})^{\frac{1}{\lambda}} [\beta(\frac{w}{\beta})^{1-\sigma} + \delta(\frac{q}{\delta})^{1-\sigma} + \gamma(\frac{u}{\gamma})^{1-\sigma}]^{\frac{\sigma}{1-\sigma}}$$

$$K^* = (\frac{u}{\gamma})^{-\sigma}(\frac{y}{\alpha})^{\frac{1}{\lambda}} [\beta(\frac{w}{\beta})^{1-\sigma} + \delta(\frac{q}{\delta})^{1-\sigma} + \gamma(\frac{u}{\gamma})^{1-\sigma}]^{\frac{\sigma}{1-\sigma}}$$

Minimumsomkostningsfunktionen bliver således

$$C^*(y,w,q,u) = wL^* + qM^* + uK^*$$

$\Leftrightarrow$

$$C^* = (\frac{y}{\alpha})^{\frac{1}{\lambda}} [w(\frac{w}{\beta})^{-\sigma} + q(\frac{q}{\delta})^{-\sigma} + u(\frac{u}{\gamma})^{-\sigma}][\beta(\frac{w}{\beta})^{1-\sigma} + \delta(\frac{q}{\delta})^{1-\sigma} + \gamma(\frac{u}{\gamma})^{1-\sigma}]^{\frac{\sigma}{1-\sigma}}$$

$\Leftrightarrow$

$$C^* = (\frac{y}{\alpha})^{\frac{1}{\lambda}} [\beta(\frac{w}{\beta})^{1-\sigma} + \delta(\frac{q}{\delta})^{1-\sigma} + \gamma(\frac{u}{\gamma})^{1-\sigma}]^{\frac{1}{1-\sigma}} = \mu^* y \lambda$$

Igen ses, at $\partial C^*/\partial y=\mu^*$, dvs. at μ^* kan tolkes som de optimale marginalomkostninger.

---

[1]Følgelig gælder sammenhængene: $\varrho/(1+\varrho)=1-\sigma=\sigma\varrho$; $\varrho=(1-\sigma)/\sigma$; $1+\varrho=1/\sigma$.

2.2. Kort sigt

Problem: Minimer $c(w,u,q,L,K,M) = wL + qM + uK$
over L,M under $y = \alpha(\beta L^{-\varrho} + \gamma K^{-\varrho} + \delta M^{-\varrho})^{-\lambda/\varrho}$

hvor $\beta+\gamma+\delta=1$. Parameteren λ er homogenitetsgraden (normalt=1).

Lagrangefunktion: $\mathcal{L} = wL + qM + uK - \mu\ [y - \alpha(\beta L^{-\varrho} + \gamma K^{-\varrho} + \delta M^{-\varrho})^{-\lambda/\varrho}]$

$$\partial\mathcal{L}/\partial L = w - \mu\lambda y^{(1+\varrho/\lambda)}\alpha^{-\varrho/\lambda}\beta L^{-(1+\varrho)} = 0$$
$$\partial\mathcal{L}/\partial M = q - \mu\lambda y^{(1+\varrho/\lambda)}\alpha^{-\varrho/\lambda}\delta M^{-(1+\varrho)} = 0$$
$$\partial\mathcal{L}/\partial \mu = y - \alpha(\beta L^{-\varrho} + \gamma K^{-\varrho} + \delta M^{-\varrho})^{-\lambda/\varrho} = 0$$

hvoraf de optimale faktorefterspørgsler er

$$L^{+} = [\mu\lambda y(\frac{y}{\alpha})^{\frac{\varrho}{\lambda}}\frac{\beta}{w}]^{\frac{1}{1+\varrho}}$$

$$M^{+} = [\mu\lambda y\frac{y}{\alpha}^{\frac{\varrho}{\lambda}}\frac{\delta}{q}]^{\frac{1}{1+\varrho}}$$

Det ses umiddelbart, at vi også på kort sigt har at de optimale faktorforhold er

$$\frac{L^{+}}{M^{+}} = (\frac{q/\delta}{w/\beta})^{\frac{1}{1+\varrho}}$$

samt at sammenhængen mellem efterspørgselen efter variable produktionsfaktorer på kort og langt sigt er en simpel funktion af forholdet mellem μ og μ^{*}:

$$\frac{L^{+}}{L^{*}} = \frac{M^{+}}{M^{*}} = (\frac{\mu}{\mu^{*}})^{\frac{1}{1+\varrho}}$$

Lagrangemultiplikatoren μ bestemmes af

$$y = \alpha(\beta L^{*-\varrho} + \delta M^{*-\varrho} + \gamma K^{-\varrho})^{-\lambda/\varrho}$$

$\Leftrightarrow$

$$y = \alpha[(\mu\lambda y(\frac{y}{\alpha})^{\frac{\varrho}{\lambda}})^{-\frac{\varrho}{1+\varrho}}[\beta(\frac{\beta}{w})^{-\frac{\varrho}{1+\varrho}} + \delta(\frac{\delta}{q})^{-\frac{\varrho}{1+\varrho}}] + \gamma K^{-\varrho}]^{-\frac{\lambda}{\varrho}}$$

$\Leftrightarrow$

$$(\frac{y}{\alpha})^{-\frac{\varrho}{\lambda}} - \gamma K^{-\varrho} = (\mu\lambda y(\frac{y}{\alpha})^{\frac{\varrho}{\lambda}})^{-\frac{\varrho}{1+\varrho}}[\beta(\frac{\beta}{w})^{-\frac{\varrho}{1+\varrho}} + \delta(\frac{\delta}{q})^{-\frac{\varrho}{1+\varrho}}]$$

$\Leftrightarrow$

$$\mu \;=\; [1-\gamma K^{-\varrho}(\frac{y}{\alpha})^{\frac{\varrho}{\lambda}}]^{-\frac{1+\varrho}{\varrho}}[\beta(\frac{\beta}{w})^{-\frac{\varrho}{1+\varrho}}+\delta(\frac{\delta}{q})^{-\frac{\varrho}{1+\varrho}}]^{\frac{1+\varrho}{\varrho}}[\lambda y(\frac{y}{\alpha})^{-\frac{1}{\lambda}}]^{-1}$$

eller, udtrykt ved substitutionselasticiteten σ:

$$\mu \;=\; [1-\gamma(K(\frac{y}{\alpha})^{-\frac{1}{\lambda}})^{-\frac{1-\sigma}{\sigma}}]^{-\frac{1}{1-\sigma}}[\beta(\frac{w}{\beta})^{1-\sigma}+\delta(\frac{q}{\delta})^{1-\sigma}]^{\frac{1}{1-\sigma}}[\lambda y(\frac{y}{\alpha})^{-\frac{1}{\lambda}}]^{-1}$$

(bemærk, at det første led i firkantet parentes er en funktion af kapital/output forholdet).

De optimale kortsigtsfaktorefterspørgsler bliver således

$$L^{+} \;=\; (\frac{w}{\beta})^{-\sigma}\frac{y}{\alpha}^{\frac{1}{\lambda}}[1-\gamma(K(\frac{y}{\alpha})^{-\frac{1}{\lambda}})^{-\frac{1-\sigma}{\sigma}}]^{-\frac{\sigma}{1-\sigma}}[\beta(\frac{w}{\beta})^{1-\sigma}+\delta(\frac{q}{\delta})^{1-\sigma}]^{\frac{\sigma}{1-\sigma}}$$

$$M^{+} \;=\; (\frac{q}{\delta})^{-\sigma}\frac{y}{\alpha}^{\frac{1}{\lambda}}[1-\gamma(K(\frac{y}{\alpha})^{-\frac{1}{\lambda}})^{-\frac{1-\sigma}{\sigma}}]^{-\frac{\sigma}{1-\sigma}}[\beta(\frac{w}{\beta})^{1-\sigma}+\delta(\frac{q}{\delta})^{1-\sigma}]^{\frac{\sigma}{1-\sigma}}$$

Kortsigtsminimumsomkostningsfunktionen bliver

$$SC^{*}(y,w,q,u,K) = wL^{+} + qM^{+} + uK$$

$\Leftrightarrow$

$$SC^{*} \;=\; [w(\frac{w}{\beta})^{-\sigma}q(\frac{q}{\delta})^{-\sigma}]\frac{y}{\alpha}^{\frac{1}{\lambda}}[1-\gamma(K(\frac{y}{\alpha})^{-\frac{1}{\lambda}})^{-\frac{1-\sigma}{\sigma}}]^{-\frac{\sigma}{1-\sigma}}[\beta(\frac{w}{\beta})^{1-\sigma}+\delta(\frac{q}{\delta})^{1-\sigma}]^{\frac{\sigma}{1-\sigma}}+uK$$

$$SC^{*} \;=\; (\frac{y}{\alpha})^{\frac{1}{\lambda}}[1-\gamma(K(\frac{y}{\alpha})^{-\frac{1}{\lambda}})^{-\frac{1-\sigma}{\sigma}}]^{-\frac{1}{1-\sigma}}[\beta(\frac{w}{\beta})^{1-\sigma}+\delta(\frac{q}{\delta})^{1-\sigma}]^{\frac{1}{1-\sigma}} \;+\; uK$$

2.3. Forholdet mellem kort og langt sigt

Det kan vises, at K^* minimerer SC^* over K for vilkårlige inputpriser w, q og u. Desuden er $\mu=\mu^*$ for $K=K^*$, da

$$\frac{L^{+}}{L^{*}} \;=\; \frac{M^{+}}{M^{*}} \;=\; (\frac{\mu}{\mu^{*}})^{\frac{1}{1+\varrho}}$$

Da vi må have, at $L^+=L^*$ for $K=K^*$, må vi således også have at $\mu=\mu^*$. Mere præcist er

$$\frac{\mu}{\mu^*}=[1-\gamma(K^{-\frac{1-\sigma}{\sigma}}(\frac{y}{\alpha})^{\frac{1-\sigma}{\sigma\lambda}}]^{-\frac{1}{1-\sigma}}[\beta(\frac{w}{\beta})^{1-\sigma}+\delta(\frac{q}{\delta})^{1-\sigma}]^{\frac{1}{1-\sigma}}[\beta(\frac{w}{\beta})^{1-\sigma}+\delta(\frac{q}{\delta})^{1-\sigma}+\gamma(\frac{u}{\gamma})^{1-\sigma}]^{-\frac{1}{1-\sigma}}$$

$$(\frac{\mu}{\mu^*})^{-(1-\sigma)} = [\beta(\frac{w}{\beta})^{1-\sigma}+\delta(\frac{q}{\delta})^{1-\sigma}+\gamma(\frac{u}{\gamma})^{1-\sigma}-\gamma(K^{-\frac{1-\sigma}{\sigma}}(\frac{u}{\gamma})^{1-\sigma}K^{*\frac{1-\sigma}{\sigma}}][\beta(\frac{w}{\beta})^{1-\sigma}+\delta(\frac{q}{\delta})^{1-\sigma}]^{-1}$$

hvoraf let ses, at $\mu/\mu^*=1$ for $K=K^*$.

Vi har derfor, ligesom i Cobb-Douglas tilfældet at

$\min_K\{SC^*(y,w,q,u,K)\} = SC^*(y,w,q,u,K^*) \quad = C^*(y,w,q,u)$

og at for $K=K^*$ er

$\mu \quad = \mu^* \;\Leftrightarrow\; \partial SC^*(y,w,q,u,K^*)/\partial y \quad = \partial C^*(y,w,q,u)/\partial y$
$L^+ \quad = L^*$ og $\quad M^+ \quad = M^*$