Danmarks Statistik
MODELGRUPPEN

Henrik Hansen

Arbejdspapir*

1. april 2001

Mere om formuleringen og fortolkningen af makroforbrugsfunktionen

Resumé:

Dette er endnu et forbrugspapir uden empiriske resultater. Formålet med papiret er dels at (forsøge at) klarlægge, hvorfor der kan være så stor forskel på idéerne om modelleringen af forbrugsfunktionen i modelgruppepapirerne HHN 12. december 2000 og HCO 5. jannuar 2001. Derfor gives indledningsvis en kort diskussion af to forskellige måder, hvormed man kan modellere forventninger til fremtidig indkomst.

Herefter vises på foranledning af direkte forespørgsler, hvordan, eller hvorfor, der kan være et konstantled i den stokastiske differensligning for forbruget. Dette gøres først i en klassisk model med en uendeligt levende repræsentativ forbruger, og siden i en lille model med aggregering over et antal forbrugere med endelig levetid i en økonomi med produktivitetsvækst.

Dette leder til den afsluttende illustrative lilleputmodel, som har til formål at belyse effekten af aggregering af forbrugere med endelig levetid i en økonomi med produktivitetsvækst, stokastisk indkomst, og privat pensionsopsparing.

Filnavn: hhn01401.zip

Nøgleord: Forbrug

1. Indledning

De to modelgruppepapirer HHN 12. december 2000 og HHN, NAD og HCO 5. februar 2001 og indlægget til symposiet i anvendt statistik 2001 (Dam med flere, 2001) indledes alle med den samme formel for udviklingen i forbruget:

$$\mathrm{E}_t(c_{t+i}) = g_c i + c_t, \qquad i = 1, 2, \ldots, \tag{1}$$

hvor $\mathrm{E}_t(c_{t+i})$ er det planlagte forbrug i periode $t + i$, givet information om indkomsten frem til periode t. På baggrund af denne relation og en livstidsbudgetrestriktion formuleres simple relationer for samlet forbrug som funktion af bl.a. indkomst og formue.

Ved to på hinanden følgende modelgruppemøder er der rejst spørgsmål til, hvordan der kan være en konstant i differensligningen for forbruget. (Ellen Andersen spurgte på mødet den 19. december 2000, mens Asger Olsen spurgte på det efterfølgende møde den 21. marts 2001). For at gøre en kort historie lang vil jeg derfor i dette papir give to udførlige forklaringer: En teoretisk forklaring, der bygger på et specifikt valg af nyttefunktion, og en aggregeringsforklaring, der bygger på en model med endeligt levende forbrugere i en økonomi med produktivitetsvækst.

Da dette papir altså handler om basal forbrugsteori, vil jeg benytte lejligheden til at give mit bud på hvorfor der er så stor forskel på modelleringsstrategierne i modelgruppepapirerne HHN 12. dcecember 2000 og HHN, NAD og HCO 5. februar 2001 i forhold til HCO 5. januar 2001. Den egentlige forskel er, så vidt jeg kan se, behandlingen af forventninger til fremtidig indkomst.

2. Den grundlæggende model

I dette afsnit opstilles en meget specifik model for en forbrugers problem. Præcisionen i problemformuleringen tjener alene til at vise, hvor vi skærer hjørner i de forskellige modelgruppepapirer om forbrugsbeslutningen. Det væsentlige resultat, som er givet i Halls artikel fra 1978, kan findes i en lang række artikler og bøger.

Vi betragter en model for livsløbsforbruget. Vores forbruger, som tager beslutninger i diskret tid, lever uendeligt, og han er til formålet udstyret med en additivt tidsseparabel nyttefunktion med identiske elementarnyttefunktioner, som sammenvejes over tid. En konstant tidspræferencerate afspejler forbrugerens utålmodighed, dvs. præference for at forbruge nu frem for senere. En stokastisk arbejdsindkomst er den eneste kilde til usikkerhed i forbrugerens beslutningsproblem. Dette betyder bl.a. at der eksisterer et perfekt kapitalmarked med et risikofrit opsparingsmedie, som giver en (konstant) positiv forrentning.

En matematisk formulering af problemet er følgende:

$$\max_{c_{t+i}} \mathrm{E}_t \left[\sum_{i=0}^{\infty} (1+\delta)^{-i} u(c_{t+i}) \right] \tag{2a}$$

givet budgetrestriktionerne

$$c_{t+i} = y_{t+i} + (1+r) A_{t+i} - A_{t+i+1}, \tag{2b}$$

transversalitetsbetingelsen

$$\lim_{t \to \infty} (1+r)^{-i} A_{t+i+1} = 0, \tag{2c}$$

og non-tidsrejse betingelsen

$$A_t \text{ er givet.} \tag{2d}$$

I dette problem benyttes symbolerne:

$$\begin{aligned}
\mathrm{E}_t &= \text{Den betingede forventning givet information frem til tidspunkt } t \\
\delta &= \text{tidspræfereceraten} \\
r &= \text{renten} \\
c_{t+i} &= \text{forbrug i periode } t+i \\
y_{t+i} &= \text{arbejdsindkomst i periode } t+i \\
A_{t+i} &= \text{initialformue i periode } t+i
\end{aligned}$$

Man kan, hvis man vil, substituere formuebeholdningerne ud, og dermed erstatte en-periode budgetrestriktionerne med en samlet budget restriktion:

$$\sum_{i=0}^{\infty} (1+r)^{-i} c_{t+i} = A_t + \sum_{i=0}^{\infty} (1+r)^{-i} y_{t+i}. \tag{3}$$

I dette tilfælde kan man med fordel kalde den vægtede sum af forventede fremtidige indkomster for den forventede humankapital

$$\mathrm{E}_t(H_t) = \sum_{i=0}^{\infty} (1+r)^{-i} y_{t+i}. \tag{4}$$

Man kan også vælge at se på et problem med endelig tidshorisont, som Hall gjorde det i sin oprindelige model i 1978. Uanset om man vælger endelig eller uendelig tidshorisont i dette problem giver Hall's analyse en nødvendig betingelse for optimum:

$$\mathrm{E}_t \left[u'(c_{t+1}) \right] = \frac{1+\delta}{1+r} u'(c_t). \tag{5}$$

Denne betingelse kaldes i daglig tale for "eulerligningen".[1] Her står jo blot at det (forventede) marginale substitutionsforhold (MRS) skal være lig det relative prisforhold:

$$\mathrm{E}_t\left[\frac{(1+\delta)^{-1}u'(c_{t+1})}{u'(c_t)}\right] = \frac{1}{1+r}. \tag{6}$$

Dette er en velkendt førsteordensbetingelse. Problemet er derfor alene, hvad man skal gøre ved forventningsoperatoren $\mathrm{E}_t[\cdot]$. Der synes at være to muligheder:

1. Forbrugeren antages at have punktforventninger. Dvs. forbrugeren kender ikke den fremtidige indkomst, men antager at den med sandsynlighed 1 bliver sekvensen

$$\{y_{t+i}^e\}_{i=0}^{\infty}. \tag{F1}$$

2. Forbrugeren antages at benytte den matematiske forventning givet information frem til tidspunkt t, hvilket benævnes $\mathcal{F}_t$:

$$\mathrm{E}_t[y_{t+i}] = \int y_{t+i}\, f(y_{t+i}|\mathcal{F}_t) dy_{t+i}. \tag{F2}$$

Lidt poppet kan man sige, at den første forbruger er uvidende mens den anden er usikker, men man kan ikke på baggrund af modellen sige at den ene formulering giver rationelle forventninger, mens den anden ikke gør. Forbrugerne i DREAM har fx en forventningsdannelse af formen (F1). I DREAM itereres herefter indtil denne forventning opfyldes. Dette er perfekt forudseenhed. Modsat giver forventningsdannelsen af formen (F2) ikke automatisk rationelle forventninger. Det er jo ikke givet at den betingede tæthed har noget som helst med den økonomiske model at gøre.

Den afgørende forskel i forbindelse med forbrugerens problem er, at man, når man arbejder med en forventningsdannelse af formen (F2), skal huske reglerne for regning med forventningsoperatoren. Dette er ikke nødvendigt, når man benytter forventningsdannelsen (F1).

En enkel sammenligning med resultater fra økonometrien, som forhåbentlig gør det lettere at gennemskue, er at tænke på (F1) som konsistente prediktioner, mens (F2) er middelrette prediktioner af indkomsten. Man skal herefter huske et par resultater for 'plim' og 'E' operatorerne.

[1] Ofte forbinder man eulerligningen med en differentialligning, som angiver en nødvendig betingelse for optimalitet i et dynamisk optimeringsproblem i kontinuert tid. Se fx Sydsætter (1978, kapitel 18), Beavis og Dobbs (1990, kapitel 6) eller andre bøger om optimering. Se også Blanchard og Fischer (1989, afsnit 2.1), som bl.a. fortæller os at eulerligningen for forbrugerens problem i kontinuert tid også er kendt som Keynes-Ramsey reglen idet Ramsey formulerede og løste dette problem i 1928. Dynamisk optimering går dog noget længere tilbage. Euler, som levede 1707-1783, publicerede en bog om emnet i 1740.

Lad x_T være en følge af (n-dimensionale) stokastiske variabler og antag at $x_T \xrightarrow{p} x$. Hvis $g(x)$ er en kontinuert funktion med $|g(x)| < \infty$ gælder

$$\operatorname{plim} g(x_T) = g(\operatorname{plim} x) \qquad \text{(Slutskys sætning hvis g er en rationel funktion)}$$
$$\mathrm{E}(g(x_T)) \geq g(\mathrm{E}(x)), \quad \text{hvis } g(x) \text{ er konveks} \qquad \text{(Jensens ulighed)}$$

Det ses, at når vi benytter en forventningsdannelse af formen (F1), kan vi reducere problemet til et ikke-stokastisk problem, som er identisk med forbrugerens problem i standard mikrobøger. Det vil være hensigtsmæssigt at erstatte indkomstsekvensen med dennes vægtede sum:

$$H_t^e = \sum_{i=0}^{\infty} (1+r)^{-i} (y_{t+i}^e) \tag{7}$$

og benytte livstidsbudgetrestriktionen (3). Førsteordensbetingelsen for optimum bliver den sædvanlige

$$\frac{(1+\delta)^{-1} u'(c_{t+1}^e)}{u'(c_t)} = \frac{1}{1+r}, \tag{8}$$

og vi kan frit vælge en elementarnyttefunktion. Det klassiske valg er en isoelastisk nyttefunktion, fordi antagelserne om homotetiske præferencer og additiv separabilitet giver denne funktionsform.

Når vi arbejder med en forventningsdannelse af formen (F2), kan vi typisk ikke finde analytiske løsninger, med mindre vi vælger meget specifikke funktionelle former for elementarnytten. Det klassiske valg er en kvadratisk nyttefunktion

$$u(c_{t+i}) = -\tfrac{1}{2}(\beta - c_{t+i})^2, \tag{9}$$

som giver en lineær eulerligning:

$$\mathrm{E}_t(c_{t+1}) = \beta \tfrac{r-\delta}{1+r} + \tfrac{1+\delta}{1+r} c_t. \tag{10}$$

Almindeligvis antages, at renten er lig tidspræferenceraten. Dette giver, at forbruget er en martingal. Hvis man definerer et støjled $\varepsilon_{t+1} = c_{t+1} - E_t(c_{t+1})$, kan eulerligningen formuleres således at forbruget ligner en random walk:

$$c_{t+1} = c_t + \varepsilon_{t+1}. \tag{11}$$

Man kan herefter gentage alle mellemregningerne i HHN 12. december 2000 og finde forbruget i periode t som funktion af initial formue og forventet humankapital

$$c_t = \tfrac{r}{1+r} \left[\mathrm{E}_t(H_t) + A_t \right]. \tag{12}$$

Det er velkendt, at når man benytter den kvadratiske nyttefunktion, svarer dette til at erstatte en usikker forbruger med en uvidende forbruger idet forbrugeren er risikoneutral. (På godt dansk haves sikkerhedsækvivalens). De to forventningsdannelser giver altså samme forbrugsplan i dette specialtilfælde.

I resten af dette papir antages at renten er lig tidspræferenceraten $r = \delta$. Ikke fordi det er realistisk, men fordi det vil forenkle resultaterne væsentligt, så man kan fokusere på de interessante aspekter. Antagelsen giver, at en uvidende forbruger planlægger et konstant forbrug for en stor klasse af elementarnyttefunktioner. (Dette konstateres eksplicit i HCO 5. januar 2001, Appendiks 1).

3. En risikoavers forbruger

Når man går ud over den kvadratiske elementarnyttefunktion får formuleringen af forventningsdannelsen, som nævnt, afgørende betydning. Caballero (1990) giver referencer til studier, som viser, at elementarnyttefunktioner med en positiv tredjeafledt ($u'''(c_t) > 0$), hvilket på engelsk kaldes 'prudence', dvs. forsigtighed, giver anledning til forbrugsfunktioner, som afhænger af variabiliteten i arbejdsindkomsten. Desværre er det sjældent muligt at finde analytiske løsninger, men Caballero (1990) viser, at den eksponentielle elementarnyttefunktion har en pæn løsning. Vi vil derfor udstyre vores forbruger med en sådan nyttefunktion, dvs. vi antager, at han har konstant absolut risikoaversion.

$$u(c_{t+i}) = -\tfrac{1}{\theta}\exp(-\theta c_{t+i}), \quad \theta > 0. \tag{13}$$

Hvis vi yderligere udstyrer forbrugeren med en forventningsdannelse af formen (F1) reduceres førsteordensbetingelsen til

$$c^e_{t+1} = c_t, \tag{14}$$

og når dette indsættes i livstidsbudgetrestriktionen fås forbruget:

$$c_t = \tfrac{r}{1+r}\left[H^e_t + A_t\right], \tag{15}$$

som er identisk med løsningen, når forbrugeren har kvadratisk nytte. Dette er ikke overraskende, idet de afgørende antagelser er uvidenhed og ønsket om konstant forbrug.

Med forventningsdannelsen (F2) skal vi finde en løsning til betingelsen

$$\mathrm{E}_t[\exp(-\theta c_{t+1})] = \exp(-\theta c_t). \tag{16}$$

Det bedste gæt på en løsning er, at processen for c_t er lineær,

$$c_{t+i} = g_{t+i-1} + c_{t+i-1} + v_{t+i}, \tag{17}$$

hvor $v_{t+i} \equiv c_{t+i} - \mathrm{E}_t(c_{t+i})$. Det eneste, vi umiddelbart ved om g_{t+i-1} i dette udtryk, er, at det er en positiv størrelse, da funktionen skal opfylde betingelsen

$$g_t = \tfrac{1}{\theta}\ln \mathrm{E}_t[\exp(-\theta v_{t+1})] > -\theta\,\mathrm{E}_t[v_{t+1}] = 0, \tag{18}$$

hvor ulighedstegnet følger af Jensens ulighed.

For at komme videre må man være eksplicit i formuleringen af den forventede fremtidige indkomst. Ikke overraskende vil vi følge Caballero og antage, at indkomsten følger en ARIMA-proces, hvorved forbrugeren opdaterer sine forventninger efter en simpel regel:

$$\mathrm{E}_t[y_{t+i}] - \mathrm{E}_{t-1}[y_{t+i}] = \phi_i \varepsilon_t, \tag{19}$$

hvor ϕ_i er den i'te MA-koefficient i den rene MA-repræsentation af indkomstprocessen.[2]

For at gøre det helt enkelt antages, at innovationerne i indkomstprocessen er uafhængige, identisk normale, $\varepsilon_t \sim iidN(0, \sigma^2)$. Med disse antagelser kan vi give en eksplicit formulering af forbrugsprocessen:

$$c_{t+i} = g + c_{t+i-1} + \psi \varepsilon_{t+i}, \tag{20}$$

hvor

$$g = \tfrac{\theta}{2}\sigma^2,$$

og

$$\psi = \tfrac{r}{1+r} \sum_{i=0}^{\infty} (1+r)^{-i} \phi_i .$$

Ligning (20) er helt ækvivalent med ligningerne (1) og (10) i HHN 12. december 2000. Vi ved nu blot præcis, hvor driften kommer fra.[3]

For fuldstændighedens skyld angives forbruget i periode t som funktion af initialformuen og den forventede humankapital:

$$c_t = \tfrac{r}{1+r}\left[\mathrm{E}_t(H_t) + A_t\right] - \tfrac{1}{r} g. \tag{21}$$

Sammenlignes (14) med (20) og (15) med (21), fremgår det, at der med denne risikoaverse forbruger er meget stor forskel på de analytiske udtryk for henholdsvis en uvidende og en usikker forbruger.

4. Aggregering af forbrugere med endelig levetid i en økonomi med produktivitetsvækst

Vi vender os nu mod den anden årsag til, at der kan være en konstant i eulerligningen for forbruget, og ser nærmere på et par aspekter af aggregering af forbrugere.

[2] Se Deaton (1992) eller HHN 12. december 2000 for en lidt mere udførlig beskrivelse af dette standard resultat.

[3] Caballero (1990, tabel 2) giver en liste med konstanter under andre fordelingsantagelser end normalitet.

Det er velkendt, at eulerligningen kan aggregeres, når (i) forbrugerne lever evigt, (ii) har samme kvadratiske elementarnyttefunktion, og (iii) har information om alle aggregerede størrelser, dvs. inddrager disse i maksimeringsproblemet.

Der findes andre specialtilfælde, fx kan man se af ovenstående afsnit, at uendeligt levende forbrugere med konstant absolut risikoaversion og ARIMA-indkomstprocesser, som lever i en økonomi, hvor renten er lig tidspræferenceraten, også kan aggregeres. Den aggregerede eulerligning vil i dette tilfælde have et konstantled.

I dette afsnit vil vi se på en approksimation af eulerligningen for samlet forbrug i en økonomi, hvor alle forbrugere lever netop T perioder. (De fødes som 0-årige og dør som $(T-1)$-årige). Vi antager, for at gøre det lidt nemmere, at der er netop een forbruger i hver alder (kohorte). Alle forbrugere har ens præferencer, som kan repræsenteres ved en kvadratisk elementarnyttefunktion. Da forbrugerne har endelige liv kan vi sætte tidspræferenceraten til nul. Det følger at vi også sætter renten til nul.[4] Indkomsten for hver levende forbruger lader vi være givet som en simpel trendstationær proces, hvor innovationerne er uafhængige og identisk fordelte:

$$y_t^{(h)} = g_y t + \varepsilon_t^{(h)}. \tag{22}$$

Her indekserer h kohorterne, fx ved at angive alderen ved tidspunkt t.

Eulerligningen for hver forbruger er

$$c_t^{(h)} = c_{t-1}^{(h)} + \tfrac{1}{T-h}\varepsilon_t^{(h)}, \tag{23}$$

hvoraf det ses at der ikke er trend.

Når vi ser på det samlede forbrug, skal vi summere over de T levende forbrugere, og det betyder at eulerligningen for samlet forbrug indeholder forskellige individer: Til tidspunkt t er der tilkommet en nyfødt, mens den ældste forbruger fra periode $t-1$ er død. Vi skal altså se på forskellen mellem disses forbrug.

Den nyfødte vil i periode t have forbruget

$$c_t^{(0)} = \frac{1}{T}\sum_{i=0}^{T-1} \mathrm{E}_t(y_{t+i}) = g_y t, \tag{24}$$

mens den afdøde i periode $t-1$ havde forbruget

$$c_{t-1}^{(T-1)} = g_y(t-T) + \frac{1}{T}\sum_{i=0}^{T-1}(T-i)\varepsilon_{t-1-i}^{(T-1-i)}. \tag{25}$$

Den del af udviklingen i det samlede forbrug, der kan tilskrives udskiftningen af en fattig gammel forbruger med en rig ung forbruger er netop

$$c_t^{(0)} - c_{t-1}^{(T-1)} = g_y T - \frac{1}{T}\sum_{i=0}^{T-1}(T-i)\varepsilon_{t-1-i}^{(T-1-i)}. \tag{26}$$

[4] Antagelsen om tidspræferenceraten og dermed renten har *ingen* kvalitativ betydning. Den afgørende antagelse er stadig at de er ens.

Da hver kohorte udgør $\frac{1}{T}$ af det samlede forbrug, kan vi approksimere eulerligningen for det samlede forbrug ved

$$C_t = g_y + C_{t-1} + u_t, \tag{27}$$

hvor $C_t \equiv \sum_{h=0}^{T-1} c_t^{(h)}$ er makroforbruget, og vi ser bort fra, at en del af u_t er kendt, da vi kender den afdødes forbrug. Innovationerne i det samlede forbrug er et vægtet gennemsnit af innovationerne i de individuelle indkomster. Innovationer i de gamle kohorters indkomst har relativt stor vægt i forhold til innovationerne i de unge kohorters indkomst. Dette er et resultat af ønsket om forbrugsudjævning på individniveau.

Det fremgår, at eulerligningen for det samlede forbrug har et konstantled, som netop er lig den forventede årlige stigning i den samlede indkomst. Forbrug og indkomst følges altså ad over tid.

Et af de mere kedelige aspekter ved denne simple model er, at det forventede samlede forbrug altid vil være større end den forventede samlede arbejdsindkomst. Økonomien har altså en voksende gæld til udlandet eller en seriøs initialformue; men hvor kommer den fra? Problemet er at den simple model giver forbrugerne en stadigt voksende indkomst, som skal allokeres til de unge år. En enkel måde at ændre dette på er at indføre en pensionsalder i modellen. Dette giver anledning til ganske interessante resultater, selv i den meget simple model der gennemgås i næste afsnit.

5. Endelig levetid og pensionsopsparing

Vi begrænser os nu til en lilleputmodel, som ser på forbrugere, der lever i tre perioder. I de to første perioder arbejder forbrugerne, mens de er pensionerede i den tredje periode. For at gøre det helt nemt lader vi igen hver kohorte bestå af netop een forbruger.[5]

Alle forbrugere, som arbejder i periode t, modtager en eksogen arbejdsindkomst på y_t, mens pensionerede forbrugere ikke har indkomst. Der er altså privat pensionsopsparing.

Der er både deterministisk og stokastisk vækst i økonomien, hvilket giver sig udslag i, at indkomsten per arbejder er en random walk med drift:

$$y_t = g + y_{t-1} + \varepsilon_t. \tag{28}$$

Hver enkelt forbruger i økonomien er igen en pæn livscykelforbruger med kvadratisk elementarnyttefunktion, og både renten og tidspræferenceraten er nul. Vi ved altså, at eulerligningen for hvert individ er

$$\mathrm{E}_{t-1}(c_t^{(h)}) = c_{t-1}^{(h)}. \tag{29}$$

[5] Dette afsnit bygger på Deaton (1992, afsnit 5.4), som er en neddroslet version af Clarida (1991).

Vi skal se på, hvad der sker med indkomst, forbrug og opsparing fra periode $t-1$ til t, og specielt på sammenhængen mellem de tre makrostørrelser, der findes ved summation over forbrugerne.

Når vi går fra periode $t-1$ til t, sker der fire væsentlige ændringer i økonomien.

1. Der fødes en ny forbruger, som straks begynder at arbejde til indkomsten y_t. Denne forbrugers forventede livsindkomst er

   $$y_t + \mathrm{E}_t(y_{t+1}) = y_t + y_t + g,$$

   I periode t forbruger den unge derfor

   $$c_t^{(1)} = \tfrac{1}{3}(2y_t + g),$$

   og dette giver opsparingen

   $$A_{t+1}^{(1)} = y_t - c_t^{(1)} = \tfrac{1}{3}(y_t - g) - \tfrac{1}{3}g.$$

2. De unge arbejdere bliver gamle. De får også indkomsten y_t, og det er netop ε_t mere end forventet. Da de skal forbruge i to perioder, justeres forbruget i periode t med $\frac{1}{2}\varepsilon_t$, hvorved det faktiske forbrug bliver

   $$c_t^{(2)} = c_{t-1}^{(2)} + \tfrac{1}{2}\varepsilon_t.$$

   Den samlede opsparing for denne forbruger er derfor

   $$A_{t+1}^{(2)} = y_t - c_t^{(2)} + A_t^{(2)} = \tfrac{2}{3}(y_t - g) - \tfrac{1}{6}\varepsilon_t.$$

3. De gamle arbejdere bliver pensionister. De har ingen indkomst, og der er derfor ikke anledning (eller mulighed for) at justere forbruget i forhold til det planlagte forbrug. Dette giver derfor

   $$c_t^{(3)} = c_{t-1}^{(3)},$$

   mens opsparingen er nul

   $$A_{t+1}^{(3)} = 0.$$

4. Pensionisterne dør. Deres samlede forbrugsmønster var

   $$\begin{aligned}
   c_{t-3}^{(4)} &= \tfrac{1}{3}(2y_{t-3} + g) \\
   c_{t-2}^{(4)} &= \tfrac{1}{3}(2y_{t-3} + g) + \tfrac{1}{2}\varepsilon_{t-2} \\
   c_{t-1}^{(4)} &= \tfrac{1}{3}(2y_{t-3} + g) + \tfrac{1}{2}\varepsilon_{t-2}
   \end{aligned}$$

Med disse oplysninger om hver kohorte kan vi danne en model for samlet forbrug. Vi vil først se på ændringen i samlet forbrug fra $t-1$ til t:

$$\begin{aligned}
\mathrm{D}\,C_t &= C_t - C_{t-1} \\
&= (c_t^{(1)} + c_t^{(2)} + c_t^{(3)}) - (c_{t-1}^{(2)} + c_{t-1}^{(3)} + c_{t-1}^{(4)}) \\
&= \tfrac{2}{3}(y_t - y_{t-3}) + \tfrac{1}{2}(\varepsilon_t - \varepsilon_{t-2})
\end{aligned}$$

Da indkomsten i periode $t-3$ kan skrives som funktion af indkomsten i periode t og gamle nyheder, kan vi finde en ren differensligning for samlet forbrug:

$$C_t = 2g + C_{t-1} + \tfrac{7}{6}\varepsilon_t - \tfrac{2}{3}\varepsilon_{t-1} + \tfrac{1}{6}\varepsilon_{t-2}. \tag{30}$$

Vi har altså igen en model, hvor det individuelle forbrug er en "ren" random walk, mens makroforbruget er ARIMA(1,1,2) med drift. Driften i det samlede forbrug er også i denne model lig med driften i den samlede indkomst.

Man kan beskrive niveaurelationen mellem indkomst og forbrug i modellen. Det gøres igen ved at summere over de tre levende kohorter i periode t, og beskrive laggede værdier af indkomsten som funktion af periode t indkomst og gamle nyheder. Med $Y_t \equiv 2y_t$ bliver "langsigtsrelationen":

$$Y_t - C_t = g + \tfrac{1}{3}\varepsilon_t + \tfrac{2}{3}\varepsilon_{t-1}. \tag{31}$$

Her er altså en 1-1 kointegration mellem arbejdsindkomsten – og en konstant der sikrer, at den forventede samlede opsparing er positiv. Den samlede opsparing i økonomien er iøvrigt, som det ses, stationær med middelværdi g, hvilket er det halve af væksten i den samlede indkomst.

At opsparingen er stationær, er ikke et resultat af de specielle antagelser i denne lilleputmodel. Clarida (1991), viser at det også er tilfældet i en OLG-model med n generationer og en vilkårlig pensionsalder, hvor arbejdsindkomsten er en ARIMA-proces. Dette leder os tilbage til modellerne i HHN 12. december 2000, hvor det foreslås at vi inddrager opsparingen som en god prediktor for fremtidige indkomstændringer. Dette blev oprindelig foreslået i Campbell (1987).

6. Afslutning

Da jeg indledte HHN 12. december 2000 med at beskrive forbruget ved en lineær stokastisk differensligning med drift, troede jeg, det var et pædagogisk fif, der kunne sikre, at opmærksomheden rettedes mod de interessante aspekter af forbrugsmodelleringen. Det var en fejl. Jeg håber dette papir har rettet op på denne fejl, og at det er vist, at det *er* smart at starte med denne differnsligning. Jeg mener derfor at argumenterne i HHN 12. december 2000 imod en strukturel fortolkning af forbrugsrelationens parametre stadig er gældende, og til en vis grad forstærkede af aggregeringsproblematikken.

Ud over fejlretningen er det vigtigt at få klarlagt, hvordan man i fremtiden ønsker at behandle optimeringsproblemer, som inddrager fremtidige variabler. Skal man benytte optimering under uvidenhed eller usikkerhed i ADAM? Der kan ikke gives et endegyldigt svar på dette, da man alligevel ikke kan modellere alle aspekter af usikkerhed. Specielt er det jo noget utilfredsstillende at behandle renten som en konstant i forbrugsbestemmelsen. Dette er alene begrundet i, at det med dagens teknologi ikke er muligt at finde en analytisk løsning på forbrugerens problem med stokastisk indkomst og rente, med mindre begge antages at være hvid støj omkring faste middelværdier.

Referencer

Beavis, Brian og Ian Dobbs (1990) *Optimization and stability theory for economic analysis,* Cambridge: Cambridge University Press.

Caballero, Ricardo J. (1990), "Consumption puzzles and precationary saving", *Journal of Monetary Economics,* 25, 113-136.

Campbell, John (1987), "Does saving anticipate declining labor income?", *Econometrica,* 55, 249-274.

Clarida, Richard H. (1991), "Aggregate stochastic implications of the life cycle hypothesis", *Quarterly Journal of Economics*, 106, 851-867.

Dam, N. Arne, Henrik Hansen og Henrik C. Olesen (2001), "Forbrugsbestemmelsen i ADAM", I Niels-Erik Jensen og Peter Linde (red.), *Symposium i Anvendt Statistik*, 207-220, København: Økonomisk Institut og Danmarks Statistik.

Deaton, Angus (1992), *Understanding Consumption*, Oxford: Clarendon Press.

Hall, Robert, E. (1978) "Stochastic implications of the life cycle–permanent income hypothesis: Theory and evidence", *Journal of Political Economy,* 86, 971–987.

Sydsæter, Knut, (1978) *Matematisk analyse II,* 2. udgave, Oslo: Universitetsforlaget

Referede modelgruppepapirer

Hansen, Henrik (12. december 2000), Noget om formuleringen og fortolkningen af makroforbrugsfunktionen.

Hansen, Henrik, N. Arne Dam og Henrik C. Olesen, (5. februar 2001), Relationer for samlet forbrug i ADAM.

Olesen, Henrik C. og Asger Olsen (5. januar 2001), Et simpelt humankapital udtryk med tilhørende forbrugsfunktion.

Resistance is futile.
You will be assimilated.
–The Borg