Danmarks Statistik
MODELGRUPPEN

Arbejdspapir*

Henrik Christian Olesen

9. februar 1999

Forbrugsfunktionen i BOF5

Resumé:

Papiret gennemgår forbrugsfunktionen i BOF5 (Bank of Finland). Baseret på et discussion paper fra "The BOF5 Macroeconomic Model of Finland, Structure and Equations". Formålet er at gøre os lidt klogere på den praktiske anvendelse af nyere forbrugsteori. Det vil bla. fremgå at det er muligt at teste for om forbrugerne er fremadskuende.

hco09299.wp

Nøgleord: Euler ligning, nyttefunktion, rente

Indledning.

Papiret er inspireret af et LINK papir om egenskaberne i den nye BOF5.[1] I den nye modelversion er en række af modellens ligninger gjort fremadskuende, vha. Euler-ligninger, men de samme ligninger findes også i en version hvor disse er tilbageskuende. De to typer ligninger kan slås til og fra som man ønsker alt efter om man ønsker at analysere politik eksperimenter eller ønsker kortsigtsforudsigelser. Dette syntes jeg er interessant at se lidt nærmere på. Da estimationsligningen for bla. forbruget i ovennævnte discussion paper kun findes beskrevet i et appendix uden mellemregninger mv., har jeg valgt nedenfor at give en mere udførlig gennemgang. Der er dog stadig visse løse ender i detaljerne.

1. Enkelt individ

Generelt refereres til Blanchard, Journal of Political Economy 93(2) hvor modellen findes gennemgået i kontinuert tid. Nedenfor er *c,y v*, hhv. forbrug, indkomst og formue (ikke-human) for det enkelte individ.

Nyttefunktionen

$$\max\ U_t \ = \ E\ (\sum_{i=t}^{\infty} \log\ c_i\ (1-\theta)^{i-t}) \ = \sum_{i=t}^{\infty} \log\ c_i\ (1-p)^{i-t}(1-\theta)^{i-t} \qquad \textbf{(1)}$$

Hvor θ er individets diskonteringsfaktor. Individet har i hver periode en konstant sandsynlighed p for at dø. Endvidere antages der i hver periode at fødes en ny generation hvis størrelse normaliseres til at være p. I en nytte-funktion, der ellers har uendelig tidshorisont, giver indførelsen af en fast dødssandsynlighed i hver periode, en vis fleksibilitet mht. forventet levetid (1/p)[2]. Det bemærkes at substitutionselasticiteten (U''(c)·c/U'(c)) er lig 1, dvs. rente og indkomsteffekt opvejer hinanden. Dette er jo et meget godt benchmark hvis man ikke ved noget (i AGL mener jeg at substitutionselasticiteten ligger mellem 0 og 1, nok tættest på 0) Endelig indeholder nyttefunktionen forsigtighedsopsparing (U'''(c)>0).

---

[1]Jf. referat fra LINK møde hco16o97.wp. Efter forespørgsel har vi venligst fået tilsendt papiret fra Hanna-Leena Mannisto.

[2]Den forventede levetid bliver:

$$\sum_{i=1}^{\infty} i\ p(1-p)^{i-1} \ = \ 1/p$$

Dynamisk definitionsligning[3]

$$v_i = \frac{(1+r_i)}{(1-p)}(v_{i-1} + y_i - c_i) \tag{2}$$

Euler ligning (se appendix 1)

$$c_{i+1} = (1-\theta)(1+r_i)\ c_i \tag{3}$$

Løsningen til Euler ligningen er:

$$c_i = ((1-\theta)(1+r_i))^i\ c_0 \tag{4}$$

Løsningen til budgetrestriktionen er:

$$\sum_{i=t}^{\infty} c_i(\frac{1-p}{1+r_i})^{i-t} = v_0 + \sum_{i=t}^{\infty} y_i(\frac{1-p}{1+r_i})^{i-t} \tag{5}$$

Ved indsættelse af Euler ligningen (4) i budgetrestriktionen (5)
fås:

$$\sum_{i=t}^{\infty} c_0((1-\theta)(1+p))^i = v_0 + \sum_{i=t}^{\infty} y_i(\frac{1-p}{1+r_i})^i \tag{6}$$

og dermed

Forbrugsfunktionen

$$c_0 = (1-(1-\theta)(1+p))(v_0 + \sum_{i=t}^{\infty} y_i(\frac{1-p}{1+r_i})^i) \tag{7}$$

2. Afvigelse fra forudsætningen om fuld forudseenhed/perfekte kapitalmarkeder.

Det antages nu for det første at renten varierer og livsindkomsten bliver:

$$h_t = \sum_{i=0}^{\infty} \frac{(1+r_0)}{\prod_{j=0}^{i}(1+r_j)}(1-p)^i\ y_{t+i} \tag{8}$$

[3]I Blanchard modellen indbetaler hvert individ *p/(1-p)* i livsforsikringspræmie, tilsvarende dør der i hver periode *p* individer og deres formue fordeles blandt de resterende *1-p* individer i forholdet *p/1-p*. Forrentningen af individernes formue er derfor: *(1+p/(1-p))(1+r)=(1+r)/(1-p)*.

Forbrugerne antages nu at kunne afvige fra fuld forudseenhed i deres forventninger til fremtidig indkomst.

$$h_t = \frac{r+p+\gamma(1-p)}{r+p} \sum_{i=0}^{\infty} \frac{(1+r_0)}{\prod_{j=0}^{i}(1+r_j)} [(1-p)(1-\gamma)]^i \; y_{t+i} \tag{9}$$

Parameteren γ i (10) udtrykker afvigelsen fra fuld forudseenhed. Hvis den er 0 svarer den til fuld forudseenhed, men hvis den er 1 svarer den til at der kun forbruges ud af løbende indkomst.[4] γ kan alternativt fortolkes som udtryk for graden af perfekte kapitalmarkeder (likviditetsrestriktioner) . Skaleringsfaktoren (r+ p + γ(1-p))/r+p er nødvendig hvis ikke *h*, den samlede human kapital blot skal nærme sig y når γ går mod 1.[5]

3. Aggregering

Den aggregerede formue, V_t, fremkommer ved summering over de enkelte individernes formue (2) (se appendix 3).

$$V_t = (1+r_t)(V_{t-1} + Y_t - C_t) \tag{10}$$

Den aggregerede forbrugsfunktion, C_t fremkommer ved aggregering over individernes forbrugsfunktion (7).

$$C_t = \alpha \; (V_{t-1} + H_t) \tag{11}$$

Hvor α=(1-(1-p)(1-θ)).

Dog defineres den aggregerede humankapital, H_t som i (9).

$$H_t = \frac{r+p+\gamma(1-p)}{r+p} \sum_{i=0}^{\infty} \frac{(1+r_0)}{\prod_{j=0}^{i}(1+r_j)} [(1-p)(1-\gamma)]^i \; Y_{t+i} \tag{12}$$

[4]Aggregeret må antagelsen svarer til der gøres hos Campbell og Mankiw, NBER Macroeconomic Annual 1989, hvor der estimeres forbrugsfunktioner der indeholder to typer forbrugere; dem der forbruger ud af deres forventede livsindkomst og dem der forbruger ud af løbende indkomst. Antagelsen om de to typer forbruger ser ud til at være empirisk praksis hvis man overhovedet skal estimere forbrugsfunktioner hvori den forventede livsindkomst indgår.

[5]r er renten der er et vægtet gennemsnit over tidshorisonten. Denne kan blot tænkes på som en konstant. Hvordan man præcist nået frem til skaleringsfaktoren i (12) fremgår dog ikke af BOF5 dokumentationen.

4. Forbrugsfunktionen på estimationsform

Det interessante er nu hvordan man kommer frem til en estimationsformel når leadede værdier af indkomsten (12) indgår i forbrugsfunktionen (11). En mulighed er at antage noget meget simpelt om forløbet i indkomsten, fx. konstant vækstrate eller stationært forløb for indkomsten. Dermed undgår man at der indgår leadede værdier af indkomsten i forbrugsfunktionen. Implicit er det sådanne simple antagelser der ligger bag forbrugsfunktionen i ADAM. En anden muligheder er at indsætte (12) i (11) og anvende en Koyck-transformation. Dermed elimineres alle leddene med leadede indkomst og i stedet kommer det forventede forbrug til at optræde på højre siden. Forbrugsfunktionen får, jf. appendix 2, følgende udseende:[6]

$$C_t = \left[(1-p)(1-\gamma)\frac{C_{t+1}}{1+r_1} + \alpha(p+\gamma(1-p))(V_{t-1}+Y_t) + \frac{\alpha\gamma(1-p)}{r+p}Y_t\right] \left[1-\alpha(1-p)(1-\gamma)\right]^{-1} \tag{14}$$

Man ser at desto større γ er desto større effekt får den løbende indkomst, Y_t, og desto mindre effekt får det forventede forbrug i næste periode, C_{t+1}. Specielt ses at hvis γ=1 i (14) forsvinder første led med forventet forbrug hvis derimod γ=0 forsvinder tredje led i (14), den løbende indkomst. Hvis forbrugerne overhovedet ikke er fremadskuende er γ=1. Dette kan man jo så teste. Endvidere kan variation i koefficienten γ tages som udtryk for betydningen af likviditetsrestriktioner, hvilket i visse studier fører til at γ er tidsvarierende.[7]

Den estimerede relation i BOF5 hedder:

$$\begin{aligned} C = \; & 0.300798 YD\ 100/PCP + (1-0.3007978) \\ & \left[0.853317\frac{C_{+1}}{1+RLBN/400-INFPCPEX} + \right. \\ & \left. 0.047707\ 100\frac{0.25WEALTH_{-1} + YD}{PCP}\right] \end{aligned} \tag{15}$$

RLBN	Bankernes gennemsnits udlånsrate
INFPCPEX	INFCP(t+1)
INFPCP	0.25(PCP/PCP(t-4)-1)[8]

[6]Det skal gøres opmærksom på at dette udtryk afviger noget fra det udtryk man kan finde i BOF5 dokumentationen s. 133. Således mangler sidste led (14), i koefficienten for Y_t.

[7]Se "Consumption and wealth: An International Comparison", Sefton og Veld 1997,NIESR. Her er forudsætningerne i Blanchard modellen, beskrevet grundigere og ikke mindst er det muligt at genskabe estimationsformlen (den strukturelle forbrugsfunktion). For fx. USA er andelen af forbrugere der er likviditetsrestrikterede estimeret til 40% og variationen i andelen er betydelig fra 50% til 20%

[8]De 0.25 i (15) foran WEALTH må være en konvertering til kvartalstal. De 100/PCP i (1) indekserer PCP=1 i 1990 fremfor PCP=100.

(15) er estimeret vha. GMM (Generalized Method of Moments). Desværre er det ikke helt oplagt hvordan de strukturelle parametre i (14) er blevet oversat til parameterrestriktionerne i (15).

Estimationsudtryk med tilbageskuende variabler

Til brug for forudsigelser anvendes en version af (15) med tilbageskuende variabler. Denne fremkommer ved i (15) at sætte $C_{t+1}=C_t$, dvs. antage statiske forventninger, og løse for C_t. Endelig opblødes dynamikken således at versionen med statiske forventninger bliver langsigtsrelationen i en fejlkorrektionsmodel. Det bemærkes her at andre typer af forventningsdannelser også må kunne specificeres.

5. Konklusion

Papiret viser hvordan man vha. nyere forbrugsteori kommer frem til et estimationsudtryk der indeholder fremadskuende variabler. Det fremgår at der findes forskellige måder hvorpå man kan opbløde antagelserne om fremadskuende forbrugere. Dette fremgår både af afsnit 2) hvor der også er plads til forbrugere der ikke er fremadskuende og af afsnit 4) hvor man kan gøre alternative antagelser om forventningsdannelsen. Det bemærkes at fremgangsmåden beskrevet ovenfor også kan varieres under forskellige antagelser om nyttefunktion, substitutionselasticitet og variation i andelen af forbrugere der er fremadskuende (likviditetsrestriktioner). Jeg syntes at vi skulle prøve og estimere os frem til om vi har fremadskuende forbrugere eller ej, jf. afsnit 4.[9] Dernæst kan man undersøge om andelen af fremadskuende forbrugere er tidsvarierende, hvilket også har en selvstændig interesse.

[9] I BOF5 dokumentationen fremgår faktisk metoder til at få fremadskuende agenter i alle dele af modellen; boligmarkedet, pengemarkedet og arbejdsmarkedet. Alternativ hypotesen om også at have agenter der ikke er fremadskuende findes dog tilsyneladende kun i forbrugsdelen af modellen.

Appendix 1. Euler ligningen

Førsteordensbetingelserne:

$$\frac{(1-p)^{i-t}}{c_i}\,(1-\theta)^{i-t} - \lambda\left(\frac{1-p}{1+r_i}\right)^{i-t} = 0 \tag{1}$$

$$\frac{(1-p)^{i-t+1}}{c_{i+1}}\,(1-\theta)^{i-t+1} - \lambda\left(\frac{1-p}{1+r_i}\right)^{i-t+1} = 0 \tag{2}$$

$$\lambda = \frac{(1-\theta)^{i-t}}{c_i}\,(1+r_i)^{i-t} \tag{3}$$

$$\lambda = \frac{(1-\theta)^{i-t+1}}{c_{i+1}}\,(1+r_i)^{i-t+1} \tag{4}$$

Hvoraf Euler ligningen fremkommer fra (3) og (4):

$$\frac{1}{c_i} = \frac{(1-\theta)(1+r_i)}{c_{i+1}} \tag{3}$$

Appendix 2. Forbrugsfunktionen på estimationsform

I forbrugsfunktionen i afsnit 3, (12) og (13), indgår uendelig mange led med leadede indkomst disse kan elimineres vha. en Koyck transformation.

Forbrugsfunktion (13) indsat i (12):

$$C_t = \alpha V_{t-1} + \alpha \frac{r+p+\gamma(1-p)}{r+p} \sum_{i=0}^{\infty} \frac{(1+r_0)}{\prod_{j=0}^{i}(1+r_j)} [(1-p)(1-\gamma)]^i \; Y_{t+i} \tag{1}$$

For nemheds sættes k=(r+p+γ(1-p))/r+p. Koyck lagges C_{t-1}:

$$\frac{C_{t-1}(1+r_1)}{(1-p)(1-\gamma)} = \frac{\alpha V_{t-2}(1+r_1)}{(1-p)(1-\gamma)} + \alpha k\left(\frac{Y_{t-1}(1+r_1)}{(1-p)(1-\gamma)} + \sum_{i=0}^{\infty} \frac{(1+r_0)}{\prod_{j=0}^{i}(1+r_j)} [(1-p)(1-\gamma)]^i \; Y_{t+i}\right) \tag{2}$$

Differensen mellem (1) og (2) bliver:

$$C_t - \frac{C_{t-1}(1+r)_1}{(1-p)(1-\gamma)} = \alpha V_{t-1} - \alpha \frac{V_{t-2}(1+r_1)}{(1-p)(1-\gamma)} - \alpha k \frac{(1+r_1)}{(1-p)(1-\gamma)} \; Y_{t-1} \tag{3}$$

For nemheds skyld sættes z=(1+r_1)/((1-p)((1-γ))

Formue definitionen dvs.:

$$V_t = (1+r_t)(V_{t-1} + Y_t - C_t) \tag{4}$$

substitueres ind i (3):

$$C_t = (z-\alpha(1+r_1)C_{t-1} + (\alpha(1+r_1)-\alpha z)V_{t-2} + (\alpha(1+r_1)-\alpha kz)Y_{t-1} \tag{5}$$

Løses for C_{t-1} fås:

$$C_{t-1} = \frac{C_t}{z-\alpha(1+r_1)} - \frac{(\alpha(1+r_1)-\alpha z)}{z-\alpha(1+r_1)} V_{t-2} - \frac{(\alpha(1+r_1)-\alpha kz)}{z-\alpha(1+r_1)} Y_{t-1} \tag{6}$$

Ved at fremdatere (6) en periode frem og indsætte værdierne for z og k skulle det nu være muligt at genskabe estimationsformlen. Tager vi første led i (7):

(7)

$$\frac{C_t}{z-\alpha(1+r_1)} = [\frac{(1+r_1)}{(1-p)(1-\gamma)} - \alpha(1+r_1)]^{-1}C_t$$

$$= [(1+r_1)(\frac{1}{(1-p)(1-\gamma)} - \frac{\alpha(1-p)(1-\gamma)}{(1-p)(1-\gamma)}]^{-1}C_t$$

$$= \frac{(1-p)(1-\gamma)}{(1- \ \alpha(1-p)(1-\gamma)}\frac{C_t}{(1+r_1)}$$

Andet led i (7):

$$\frac{(\alpha(1+r_1)-\alpha z)}{z-\alpha(1+r_1)}V_{t-1} = [\alpha(1+r_1) - \frac{\alpha(1+r_1)}{(1-p)(1-\gamma)}][(1+r_1)(\frac{1}{(1-p)(1-\gamma)} - \frac{\alpha(1-p)(1-\gamma)}{(1-p)(1-\gamma)}]^{-1} \quad \textbf{(8)}$$

$$= \frac{\alpha(1-p)(1-\gamma)-\alpha}{1-\alpha(1-p)(1-\gamma)}V_{t-1}$$

$$= \frac{-\alpha(p+\gamma(1-p))}{1-\alpha(1-p)(1-\gamma)}V_{t-1}$$

$$\frac{(\alpha(1+r_1)-\alpha kz)}{z-\alpha(1+r_1)}Y_t = [\alpha(1+r_1) - \frac{\alpha(1+r_1)}{(1-p)(1-\gamma)}\frac{(r+p+\gamma(1-p))}{(r+p)}] [(1+r_1)(\frac{1}{(1-p)(1-\gamma)} - \frac{\alpha(1-p)(1-\gamma)}{(1-p)(1-\gamma)}]^{-1}Y_t \quad \textbf{(9)}$$

$$= [\alpha(1-p)(1-\gamma) - \alpha\frac{(r+p+\gamma(1-p)}{(r+p)}] [1 - \alpha(1-p)(1-\gamma)]^{-1}Y_t$$

$$= -[\alpha(p+\gamma(1-p) + \frac{\alpha\gamma(1-p)}{(r+p)}] [1 - \alpha(1-p)(1-\gamma)]^{-1}Y_t$$

Ved at samle (7),(8) og (9) fremkommer estimationsformlen for C_t:

$$C_t = [(1-p)(1-\gamma)\frac{C_{t+1}}{1+r_1} + \alpha(p+\gamma(1-p))(V_{t-1}+Y_t) + \frac{\alpha\gamma(1-p)}{r+p}Y_t] \qquad \textbf{(10)}$$
$$[1-\alpha(1-p)(1-\gamma)]^{-1}$$

Appendix 3. Aggregering

Definition af aggregeret forbrug, indkomst og formue:

$$C_t = \sum_{k=-\infty}^{t} p(1-p)^{t-k} c(k,t) \tag{11}$$

$$H_t = \sum_{k=-\infty}^{t} p(1-p)^{t-k} h(k,t) \tag{12}$$

$$V_{t-1} = \sum_{k=-\infty}^{t} p(1-p)^{t-k} h(k,t-1) \tag{13}$$

Fortolkningen af $p(1\text{-}p)^{t\text{-}k}$ er antal personer i hver generation; der fødes i hver periode p og til tidspunkt t vil der være $p(1\text{-}p)^{t\text{-}k}$ der er overlevet fra den k'te generation.[10] Den aggregerede forbrugsfunktion (11) fås umiddelbart ved at gange igennem med $p(1\text{-}p)^{t\text{-}k}$ i den individuelle forbrugsfunktion (7) og summere. Det samme gøres for den individuelle formuedefinition (2):

$$v_{k,i} = \frac{(1+r_i)}{(1-p)}(v_{k,i-1} + y_{k,i} - c_{k,i}) \tag{14}$$

$$p(1-p)^{i-k} v_{k,i} = \frac{(1+r_i)}{1-p}(p(1-p)^{i-k} v_{k,i-1} + p(1-p)^{i-k} y_{k,i} - p(1-p)^{i-k} c_{k,i}) \tag{15}$$

Summeres over (15) fås:

[10] Dette svarer til en antagelse om at den samlede befolkning er normeret til at være lig 1. Hvis den samlede befolkning er N_t og der i hver periode fødes N_0, er den samlede befolkning defineret som:

$$N_t = N_0 \sum_{k=-\infty}^{t} (1-p)^{i-k} = \frac{N_0}{p}$$

Sættes N_t=1 bliver N_0 dermed p.

$$V_t = \frac{(1+r_t)}{1-p} V_{t-1} + Y_t - C_t \qquad \textbf{(16)}$$

Som det fremgår er renten i formuedefinitionen normeret med (1-p).