Danmarks Statistik
MODELGRUPPEN

Arbejdspapir*

Grane Høegh

26. november 2010

Prisindeks

Resumé:

Dette papir beskriver helt grundlæggende, hvad prisindeks er, og hvordan de knytter sig til mængder og størrelser i faste priser. Siden 2005 har det været standard at benytte kædede værdier. Der beskrives hvad kædede værdier er, og hvordan de konstrueres.

GRH26N10

Nøgleord: Priser

1. Indledning

Det, vi virkelig har lyst til, er at kaste os over data og analysere virkninger af ændringer i f.eks. forbrugerprisindekset og modellere økonomiske modeller, så vi kan forudsige udviklingen. Inden da er det dog nødvendigt at vide, hvad en pris er. Det er let for en enkelt vare, men de fleste makroøkonomiske størrelser er aggragter af flere varer. Indtil 2005 var alting i Nationalregnskabet opgjort i fastbase priser. Det var nemt at regne med, hvilket jeg vil gennemgå i det følgende. Senere er man dog gået over til kædede priser. Det har gjort alting mere kompliceret. For eksempel må man ikke bare ligge to tal sammen, når man skal finde deres samlede værdi. Så, hvis man ikke skal begå store fejl, har man brug for lidt introduktion til prisindeks. Indrømmet er det pensum i samfundsbeskrivelse, men ikke alle kan huske så meget af noget, der ligger flere år tilbage, så her kommer en lille opsummering.

Afsnit 2 forklarer, hvad et prisaggregat er. Der findes forskellige måder at lave prisaggregater. Fastbaseprisaggregatet er forklaret i afsnit 3, mens afsnit 4 opstiller et teoretisk prisaggregat, som i afsnit 5 bruges til at belyse problemet med fastbasemængde- og prisaggregatet. Afsnit 6 beskæftiger sig med kædede Laspeyres mængder og tilhørende Paasche kædepriser, mens afsnit 7 giver en konklusion.

2. Hvad er et prisaggregat?

Et prisindeks for en enkelt vare er ret simpelt. Det er blot at normere varen i et bestemt år. Med basisår i 2000. Er prisindekset lig 1 i år 2000. Herved er den tilhørende fastprisstørrelse i år 2000 lig den nominelle værdi i år 2000. Størrelser i faste priser er for en enkelt vare proportional med mængden, derfor kaldes størrelser i faste priser også for mængder eller mængdeindeks. Aggregerede størrelser i faste priser er også et mængdebegreb, men lidt mindre håndfast.

Et prisaggregat er en pris (typisk et prisindeks) for et varebundt bestående af to eller flere varer. De forskellige varers priser skal vægtes sammen for at få prisaggregatet. Spørgsmålet er, hvordan de skal vægtes sammen.

Hvis man skal lave et prisindeks for biler, kan man måske finde på at sige ”En bil er en bil” og lade en billig bil vægte lige så tungt som en dyr. Skal man lave et prisindeks for køretøjer inkl. cykler, så vil man ikke lade en cykel veje lige så tungt som en bil! Altså vil man ikke vægte på baggrund af stk. Selv om man ville, så opgør Nationalregnskabet ikke nogle størrelser i stk. De opgør kun størrelser i faste priser og i løbende priser.

Jeg vil beskrive to måder at vægte priserne på. Den ene er den teoretisk korrekte måde, som kræver, at man kender forbrugernes nyttefunktioner og virksomhedernes produktionsfunktioner. Den anden måde er at benytte ikke-teoretiske prisaggregater såsom Paasche og Laspeyres. De to metoder vil blive beskrevet nedenfor.

3. Fastbase pris- og mængdeaggregatet

Det er værd at vide, at til et Laspeyres mængdeaggregat knytter der sig et Paasche prisaggregat og omvendt. Det er også værd at vide, at Laspeyres benytter foregående referencepunkt som vægte, mens Paasche benytter nuværende referencepunkt som vægte. Dette er beskrevet i detaljer i bilag A.

Indtil 2005 var Laspeyres fastbase mængdeaggregatet og Paasche fastbase prisaggregatet, hvad man benyttede i nationalregnskabet. Referencepunktet for fastbase Laspeyres-aggregaterne er basisåret, hvilket i skrivende stund er år 2000. Fortolkningen er: Hvis priserne er som i basisåret, hvad ville de samlede beløb så være. Derfor kaldes disse mængder også for målt i 2000-priser.Alle mængder vægtes med prisen i basisåret, da alle priser i basisåret er indekseret, kan man blot lægge komponenterne i fastbase aggregaterne sammen. Vil man gerne finde det samlede forbrug af frugt, X_1, og grønt, X_2, kan man blot lægge deres fastbasemængder sammen:

$$X = X_1 + X_2 \tag{3.1}$$

Det tilhørende Paascheprisindeks findes simpelt ved:

$$p = \frac{p_1 X_1 + p_2 X_2}{X_1 + X_2} \tag{3.2}$$

Det ses, at prisudviklingen måles baseret på mængderne i den aktuelle periode.

Fordelene ved fastbase indekset er, at de er let arbejde med, da både løbende og faste priser er additive (må lægges sammen). De er lette at fortolke, da det blot er, hvis priserne var som i basisåret.

Ulempene ved fastbase er, at hvis priserne bliver meget anderledes end i basisåret, så vil forbrugerne/virksomhederne have substitueret over til de billigere produkter. Hermed undervurderes prisudviklingen, da produkter med lav prisudvikling vil veje tungere.

4. Et teoretisk prisaggregat

Findes der en repræsentativ forbruger, og kender man hans præferencer, så bør man benytte det teoretisk korrekte prisindeks. Idéen bag det er, som følger. Antag, at man er interesseret i prisaggregatet for frugt og grøntsager. De indgår som komponenter i en større nyttefunktion, og prisaggregatet vil helt generelt ikke være uafhængigt af priserne på andre varer. Så enten skal man have andre priser med i prisaggregatet, ellers skal man antage seperabilitet i nyttefunktionen[1].

Findes en repræsentativ agent, og kender man hans præferencer, og er den seperabel, så kan man finde prisaggregatet for frugt og grønt, som prisen på 1 nytteenhed af frugt og grønt. Nytte er et ordinalt begreb – dvs. 1 nytteenhed er ikke veldefineret, da man kan gange hele nyttefunktionen med 2, og de vil repræsentere samme præferencer. Man tager derfor udgangspunkt i et indeksår – f.eks. år 2000 – og siger, at 1 kr. forbrug i år 2000 giver en nytteenhed.

Blev der brugt 2 mio. kr. i år 2000 på frugt og grønt, så var nytten af dette 2 mio., mens prisen på frugt og grønt var 1. Antag priserne på både frugt og grønt stiger frem til 2010, mens der bliver købt samme mængde. Prisen på nytte beregnes som budgettet divideret med nytten i dette år. Så var nytten 2 mio., og blev der brugt 2.5 mio kr, så er det teoretiske prisaggregat 1.25.

Lars Haagen Pedersen har i 1998 skrevet et papir: "Egenskaber ved specificerede funktioner Cobb Douglas, CES og Nested CES". Her udledes prisindeks for disse funktioner. Papiret er tilgængeligt på DREAMs hjemmeside.

Forbrugeren maksimerer sin CES-nyttefunktion givet ved:

$$X(X_1, X_2) = \left(\theta^{1/\sigma}\left(X_1\right)^{(\sigma-1)/\sigma} + (1-\theta)^{1/\sigma}\left(X_2\right)^{(\sigma-1)/\sigma}\right)^{\sigma/(\sigma-1)} \qquad (4.1)$$

Maksimeringen sker under bibetingelse af, at budgettet er overholdt:

$$m = p_1 X_1 + p_2 X_2 \qquad (4.2)$$

hvor X_1 er den ene vare f.eks. frugt med prisen p_1, X_2 er den anden vare f.eks. grøntsager med prisen p_2, m er budgettet til vare 1 og 2, θ er omkostningsandelen til vare 1 i basisåret og σ er substitutionselasticiteten.

Aggregatets CES prisindekset er jf. bilag B givet ved:

$$p \equiv \left(\theta\left(p_1\right)^{1-\sigma} + (1-\theta)\left(p_2\right)^{1-\sigma}\right)^{\frac{1}{1-\sigma}} \qquad (4.3)$$

For $\sigma = 1$ er det en Cobb-Douglas funktion med prisindekset:

$$p \equiv p_1^{\theta} p_2^{1-\theta} \qquad (4.4)$$

For $\sigma = 0$ er det en Leontief funktion med prisindekset:

$$p \equiv \theta p_1 + (1-\theta)\, p_2 \qquad (4.5)$$

[1] Er nyttefunktionen separabel, så er den eller kan transformeres til en homotetisk nyttefunktion, hvor en stigning på en procent i budgettet betyder en stigning på en procent i nytten. Er ens nyttefunktion ikke homotetisk, så bør man omforme den til en som er.

5. Fastbaseindeksets problem

Antag, at vi har en forbruger som har en separabel CES-nyttefunktion med frugt og grønt med parametrene $\theta = 0.5$ og $\sigma = 1$. Altså vil forbrugeren ved ens priser bruge lige meget frugt og grønt, og varerne er Cobb-Douglas. I basisåret 2000 forbruges for 50 kr. frugt og 50 kr. grønt. Herefter stiger prisen på vare 1 med 20 procent om året, prisen på vare 2 er uændret og forbrugsbudgettet til frugt og grønt øges med 20 procent om året. På baggrund af nyttefunktionen vælger forbrugeren at øge forbruget af vare 2 med 20 procent om året, mens forbruget af vare 1 er uændret. På baggrund af nyttefunktionen beregnes de optimale forbrug. Disse resultater er vist i tabel 5.1.

Tabel 5.1 Pris- og mængdeaggregat for Cobb-Douglas.

	2000	2001	2002	2003	2004	2005	2006	2007
p1	1.0000	1.2000	1.4400	1.7280	2.0736	2.4883	2.9860	3.5832
p2	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000
M	100.00	120.00	144.00	172.80	207.36	248.83	298.60	358.32
X1	50.00	50.00	50.00	50.00	50.00	50.00	50.00	50.00
X2	50.00	60.00	72.00	86.40	103.68	124.42	149.30	179.16
p_teori	1.0000	1.0954	1.2000	1.3145	1.4400	1.5774	1.7280	1.8929
p_fastbase	1.0000	1.0909	1.1803	1.2669	1.3493	1.4267	1.4982	1.5636
X_teori	100.00	109.54	120.00	131.45	144.00	157.74	172.80	189.29
X_fastbase	100.00	110.00	122.00	136.40	153.68	174.42	199.30	229.16
X_f/X_t	1.000	1.004	1.017	1.038	1.067	1.106	1.153	1.211

På baggrund af de observerede forbrug kan nemt beregnes et fastbase mængdeaggregat. Det er blot at lægge forbruget af frugt i faste priser sammen med mængden af grønt i faste priser. Det teoretiske mængdeaggregat for de to varer er i basisåret også lig summen af de to varer. Dette gælder derimod ikke efterfølgende f.eks. er den samlede mængde i 2002 50+72=122, mens mængdeaggregatet er 120. Det teoretiske mængdeaggregat er altså mindre end den samlede mængde.

Forbrugeren ville til ens priser helst forbruge lige meget af hver vare, men den skæve prisudvikling har gjort at forbrugeren køber relativt mere af den billige vare. Forbrugerens nytte havde været højere ved et forbrug af 61 af hver vare, men dette tillader budgettet ikke. Dermed er forbrugeren ikke lige så godt stillet, som hvis han havde haft et budget på 122 i år 2000.

Det er et generelt resultat, at fastbase mængdeaggregatet vil overvurdere udviklingen, hvis der er en forskellig prisudvikling på underkomponenterne. Det ses også på tabel 5.1, at denne overvurdering bliver mere og mere markant, jo mere de relative priser fjerner sig fra de relative priser i basisåret.

Det klasiske eksempel på uhensigtsmæssigheden ved fastbase indeks er computere. I 1966 var prisen på computere meget høj og efterspørgslen var meget lav sammenlignet med år 2000. Med Paascheprisindekset bliver den meget høje pris på computere fra 1966 vejet sammen med den meget høje mængde af computere i 2000, hvilket i høj grad overvurderer prisindekset i 1966. Et voldsomt prisfald for de få computere der eksisterede i 1960'erne kunne betyde, at prisindekset ville være stabilt i perioden selvom de resterende priser steg. Dette er meget urimeligt. Hvorfor skulle computere - der stort set ikke vejede noget i 1966 - have så stor betydning for prisindekset? Problemet er, at man kommer for langt væk fra basisåret.

6. Kædede Laspeyres mængder og kædede Paasche priser

Problemet med Laspeyres fastbase mængdeindeks har gjort, at man i nationalregnskabet er gået over til at angive mængderne som kædede Laspeyres mængder. Forskellen er, at i stedet for at bruge et basisår som grundlag for udviklingen i pris- og mængdeindeks, så bruger man året før. Det kædede Laspeyres mængdeindeks er givet ved:

$$X = \frac{p_{1,-1}X_1 + p_{2,-1}X_2}{p_{-1}} \tag{6.1}$$

hvor fodtegn -1 betyder, at det er prisen fra sidste periode.

Her er det dog nødvendigt at kende det tilhørende Paashceprisindeks fra året før, som er givet ved:

$$p = p_{-1}\frac{p_1X_1 + p_2X_2}{p_{1,-1}X_1 + p_{2,-1}X_2} \tag{6.2}$$

Dette kræver dog det tilhørende Paascheprisindeks for året før igen. Alle priser er stadig sat lig 1 i år 2000, så med udgangspunkt i år 2000 kan ovenstående formel bruges for årene før. For før 2000 kan man vende formlen om:

$$p_{-1} = p\frac{p_{1,-1}X_1 + p_{2,-1}X_2}{p_1X_1 + p_2X_2} \tag{6.3}$$

Den store fordel ved kædeindeks er, at vægtene ikke i samme grad forældes. De er kun en periode gamle og ikke adskillige år gamle. En anden stor fordel er, at de er det officielle prisindeks – de er standard i Nationalregnskabet og langt de fleste andre steder.

Hvis der ikke er nogen substitution mellem varerne i aggregatet, så vil vægtene være uændrede over tid. Det betyder, at den kædede Paasche pris og fastbase Paasche prisen begge vil være lig det teoretiske prisindeks. Dette er vist i bilag C. Jo større substitution der er mellem varerne, jo mere vil vægtene være ændret over tid, og jo dårligere vil de to Paasche priser afspejle det teoretiske prisindeks. Fastbase Paasche prisen vil have dårligere og dårligere vægte over tid, eftersom de relative priser fjerner sig fra udgangsåret. Den kædede Paasche pris vil aldrig stemme 100 procent, men vil over tid tilpasse sig til de nye vægte. Idet det kædede indeks løbende tilpasser sig de nye vægte vil det aldrig komme alt for langt væk fra det teoretiske indeks. Derfor kaldes de kædede indeks for superlative indeks.

Ovenstående illustreres ved at beregne kædede mængder og priser for eksemplet vist i tabel 5.1. Tabel 6.1 viser, hvordan kædede aggregater rammer i forhold til fastbase aggregaterne. Efter 7 år rammer fastbaseaggregatet over 21 procent over, mens kædeaggregatet rammer under 3 procent over. Man skal være opmærksom på, at ligesom det teoretiske mængdeaggregat er det kædede aggregat ikke lig summen af underkomponenterne, hvilket er en underliggende egenskab af præcis fastbase mængdeaggregatet.

Tabel 6.1 Pris- og mængdeaggregat for Cobb-Douglas.

	2000	2001	2002	2003	2004	2005	2006	2007
p1	1.0000	1.2000	1.4400	1.7280	2.0736	2.4883	2.9860	3.5832
p2	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000
M	100.00	120.00	144.00	172.80	207.36	248.83	298.60	358.32
X1	50.00	50.00	50.00	50.00	50.00	50.00	50.00	50.00
X2	50.00	60.00	72.00	86.40	103.68	124.42	149.30	179.16
p_teori	1.0000	1.0954	1.2000	1.3145	1.4400	1.5774	1.7280	1.8929
p_fastbase	1.0000	1.0909	1.1803	1.2669	1.3493	1.4267	1.4982	1.5636
p_kæde	1.0000	1.0909	1.1901	1.2983	1.4163	1.5451	1.6855	1.8387
X_teori	100.00	109.54	120.00	131.45	144.00	157.74	172.80	189.29
X_fastbase	100.00	110.00	122.00	136.40	153.68	174.42	199.30	229.16
X_kæde	100.00	110.00	121.00	133.10	146.41	161.05	177.16	194.87
X_f/X_t	1.000	1.004	1.017	1.038	1.067	1.106	1.153	1.211
X_k/X_t	1.000	1.004	1.008	1.013	1.017	1.021	1.025	1.029

Den store ulempe ved kædede Laspeyres mængder er, at de generelt ikke er additive:

$$X = \frac{p_{1,-1}}{p_{-1}} X_1 + \frac{p_{2,-1}}{p_{-1}} X_2 \neq X_1 + X_2 \tag{6.4}$$

Det gør det mere besværligt, at hver man man skal finde værdien af to tal i kædede værdier, så skal man til at udregne et prisaggregat, hvor man med fastbase blot kan lægge dem sammen. Det er den største ulempe ved kædede værdier.

Tag udgangspunkt i forsyningsbalancen:

$$Y = \frac{p_{C,-1}}{p_{Y,-1}} C + \frac{p_{I,-1}}{p_{Y,-1}} I + \frac{p_{G,-1}}{p_{Y,-1}} G + \frac{p_{NX,-1}}{p_{Y,-1}} NX \tag{6.5}$$

hvor *Y* er BNP, *C* er privatforbrug, *I* er investeringer, *G* er offentligt forbrug og *NX* er nettoeksporten alle i kædede mængder. Stiger det offentlige forbrug med 1 mia. kr. vil det betyde, at BNP skal stige med $\frac{p_{C,-1}}{p_{Y,-1}}$ mia. kr. Alternativt skal f.eks. nettoeksporten falde med $\frac{p_{C,-1}}{p_{NX,-1}}$ mia. kr. Dette gør det svært at tale om effekten af 1 mia. kr. i kædede værdier, da denne mia. kr. vil påvirke de øvrige komponenter med noget forskelligt fra 1 mia. kr. Er man langt fra basisåret, så kan de relative priser være markant forskellige. Hermed kan 1 mia. mere offentlig forbrug give en stigning på 900 mio. kr. i BNP eller blive crowded out af 800 mio. kr. mindre eksport og 850 mio. kr. mindre nettoeksport. Dette kan drille mange brugere, som er vant til at arbejde med fastbasemængder.

7. Konklusion

De fleste steder er BNP-væksten underforstået væksten i BNP i kædede Laspeyres mængder. På samme måde er standarden at angive størrelser i kædede Laspeyres mængder. Derfor skal man vide, hvad en kædet Laspeyres mængde er, og hvordan man benytter disse tal i praksis. I dette papir er gennemgået baggrunden for de forskellige anvendte prisindeks og forklaret, hvordan man skaber et aggregat af to tidsserier.

Bilag A: Laspeyres og Paasche indeks

Et Laspeyres indeks er givet ved:

$$\frac{x_{T_1}}{x_{T_0}} = \frac{\omega_{1,T_0} x_{1,T_1} + \omega_{2,T_0} x_{2,T_1}}{\omega_{1,T_0} x_{1,T_0} + \omega_{2,T_0} x_{2,T_0}} \tag{A.1}$$

hvor x_1 og x_2 er ”ting”, der skal vægtes sammen til et aggregat x til tidspunktet T_1, mens ω_{1,T_0} og ω_{2,T_0} er vægtene på henholdsvis x_1 og x_2, som gjaldt i periode T_0. Man vejer ”ting” sammen med deres vægte i periode T_0. Udviklingen i de vægtede ”ting” er så lig udviklingen i aggregatet.

Et Paasche indeks er givet ved:

$$\frac{x_{T_1}}{x_{T_0}} = \frac{\omega_{1,T_1} x_{1,T_1} + \omega_{2,T_1} x_{2,T_1}}{\omega_{1,T_1} x_{1,T_0} + \omega_{2,T_1} x_{2,T_0}} \tag{A.2}$$

hvor x_1 og x_2 er ”ting”, der skal vægtes sammen til et aggregat x_{12} til tidspunktet T_1, mens ω_{1,T_1} og ω_{2,T_1} er vægtene på henholdsvis x_1 og x_2, som gjaldt i periode T_1. Man vejer ”ting” sammen med deres vægte i periode T_1. Udviklingen i de vægtede ”ting” er så lig udviklingen i aggregatet.

Forskellen på Lapeyres og Paasche indekset er, at Laspeyres bruger vægte fra basisåret, T_0, mens Paasche bruger vægte fra indeværende år, T_1.

Jeg vil nu gerne vise, at når mængdeindekset er et Laspeyres indeks, så er prisindekset et Paasche indeks. For mængder er vægtene priser. Et Laspeyres mængdeindeks er givet ved:

$$\frac{X_{T_1}}{X_{T_0}} = \frac{p_{1,T_0} X_{1,T_1} + p_{2,T_0} X_{2,T_1}}{p_{1,T_0} X_{1,T_0} + p_{2,T_0} X_{2,T_0}} \tag{A.3}$$

hvor X er mængder og p er priser. Ligningen kan omskrives til:

$$X_{T_1} = \frac{p_{1,T_0} X_{1,T_1} + p_{2,T_0} X_{2,T_1}}{p_{T_0}} \tag{A.4}$$

da $p_{1,T_0} X_{1,T_0} + p_{2,T_0} X_{2,T_0} = p_{T_0} X_{T_0}$.

For priser er vægtene mængder. Et Paasche prisindeks er givet ved:

$$\frac{p_{T_1}}{p_{T_0}} = \frac{X_{1,T_1} p_{1,T_1} + X_{2,T_1} p_{2,T_1}}{X_{1,T_1} p_{1,T_0} + X_{2,T_1} p_{2,T_0}} \tag{A.5}$$

Denne ligning kan også omskrives til:

$$X_{T_1} = \frac{p_{1,T_0} X_{1,T_1} + p_{2,T_0} X_{2,T_1}}{p_{T_0}} \tag{A.6}$$

da $p_{1,T_1} X_{1,T_1} + p_{2,T_1} X_{2,T_1} = p_{T_1} X_{T_1}$.

Det gælder også, at når mængdeindekset er et Paascheindeks, så er prisindekset et Laspeyres indeks.

Bilag B: CES prisindeks

CES produktionsfunktionen er givet ved:

$$X(X_1, X_2) = \left(\theta^{1/\sigma} X_1^{(\sigma-1)/\sigma} + (1-\theta)^{1/\sigma} X_2^{(\sigma-1)/\sigma}\right)^{\sigma/(\sigma-1)} \tag{B.1}$$

Dette giver følgende forhold:

$$\frac{X_1}{X_2} = \frac{\theta}{1-\theta}\left(\frac{p_1}{p_2}\right)^{-\sigma} \tag{B.2}$$

Det teoretiske prisindeks for CES funktionen er:

$$p^{CES} \equiv \left(\theta(p_1)^{1-\sigma} + (1-\theta)(p_2)^{1-\sigma}\right)^{\frac{1}{1-\sigma}} \tag{B.3}$$

Fastbaseindekset kan omskrives til:

$$\begin{aligned} p^{FB} &= \frac{p_1 X_1 + p_2 X_2}{X_1 + X_2} = p_1 \frac{X_1}{X_1 + X_2} + p_2 \frac{X_2}{X_1 + X_2} \\ &= p_1\left(1 + \frac{X_2}{X_1}\right)^{-1} + p_2\left(1 + \frac{X_1}{X_2}\right)^{-1} \\ &= p_1\left(1 + \frac{1-\theta}{\theta}\left(\frac{p_1}{p_2}\right)^{\sigma}\right)^{-1} + p_2\left(1 + \frac{\theta}{1-\theta}\left(\frac{p_1}{p_2}\right)^{-\sigma}\right)^{-1} \\ &= \theta p_1^{1-\sigma}\left(\theta p_1^{-\sigma} + (1-\theta)\, p_2^{-\sigma}\right)^{-1} \\ &\quad + (1-\theta)\, p_2^{1-\sigma}\left((1-\theta)\, p_2^{-\sigma} + \theta p_1^{-\sigma}\right)^{-1} \\ &= \frac{\theta p_1^{1-\sigma} + (1-\theta)\, p_2^{1-\sigma}}{\theta p_1^{-\sigma} + (1-\theta)\, p_2^{-\sigma}} \\ &= \frac{\left(\theta p_1^{1-\sigma} + (1-\theta)\, p_2^{1-\sigma}\right)^{-\sigma/(1-\sigma)}}{\theta p_1^{-\sigma} + (1-\theta)\, p_2^{-\sigma}}\, p^{CES} \\ &= \frac{\left(\theta\left(p_1/p_2\right)^{1-\sigma} + (1-\theta)\right)^{-\sigma/(1-\sigma)}}{\theta\left(p_1/p_2\right)^{-\sigma} + (1-\theta)}\, p^{CES} \end{aligned} \tag{B.4}$$

Jo mere de relative priser driver fra hinanden, jo mere driver de to prisindeks fra hinanden:

$$\frac{\partial\left(px^{FB}\big/px^{CES}\right)}{\partial\left(px_1\big/px_2\right)}\frac{\left(px_1\big/px_2\right)}{\left(px^{FB}\big/px^{CES}\right)}=-\sigma\frac{\theta\left(px_1\big/px_2\right)^{1-\sigma}}{\theta\left(px_1\big/px_2\right)^{1-\sigma}+\left(1-\theta\right)} -\sigma\frac{\theta\left(px_1\big/px_2\right)^{-\sigma}}{\theta\left(px_1\big/px_2\right)^{-\sigma}+\left(1-\theta\right)} \tag{B.5}$$

Det kædede indeks kan omskrives til:

$$\begin{aligned}
px &= px_{-1}\frac{px_1 fX_1+px_2 fX_2}{px_{1,-1}fX_1+px_{2,-1}fX_2}\\
&= px_{-1}\left(\left(\frac{px_{1,-1}+px_{2,-1}fX_2/fX_1}{px_1}\right)^{-1}+\left(\frac{px_{1,-1}fX_1/fX_2+px_{2,-1}}{px_2}\right)^{-1}\right)\\
&= px_{-1}\left(\begin{array}{l}\theta px_1\left(\theta px_{1,-1}+\left(1-\theta\right)\left(\dfrac{px_1}{px_2}\right)^{\sigma}px_{2,-1}\right)^{-1}\\ +\left(1-\theta\right)px_2\left(\theta\left(\dfrac{px_1}{px_2}\right)^{-\sigma}px_{1,-1}+\left(1-\theta\right)px_{2,-1}\right)^{-1}\end{array}\right)\\
&= px_{-1}\left(\begin{array}{l}\theta px_1^{1-\sigma}\left(\theta px_{1,-1}px_1^{-\sigma}+\left(1-\theta\right)px_{2,-1}px_2^{-\sigma}\right)^{-1}\\ +\left(1-\theta\right)px_2^{1-\sigma}\left(\theta px_{1,-1}px_1^{-\sigma}+\left(1-\theta\right)px_{2,-1}px_2^{-\sigma}\right)^{-1}\end{array}\right)\\
&= px_{-1}\frac{\theta px_1^{1-\sigma}+\left(1-\theta\right)px_2^{1-\sigma}}{\theta px_{1,-1}px_1^{-\sigma}+\left(1-\theta\right)px_{2,-1}px_2^{-\sigma}}\\
&= px_{-1}\frac{\left(\theta px_1^{1-\sigma}+\left(1-\theta\right)px_2^{1-\sigma}\right)^{-\sigma/(1-\sigma)}}{\theta px_{1,-1}px_1^{-\sigma}+\left(1-\theta\right)px_{2,-1}px_2^{-\sigma}}px^{CES}\\
&= px_{-2}\frac{\theta px_{1,-1}^{1-\sigma}+\left(1-\theta\right)px_{2,-1}^{1-\sigma}}{\theta px_{1,-2}px_{1,-1}^{-\sigma}+\left(1-\theta\right)px_{2,-2}px_{2,-1}^{-\sigma}}\\
&\quad\frac{\left(\theta px_1^{1-\sigma}+\left(1-\theta\right)px_2^{1-\sigma}\right)^{-\sigma/(1-\sigma)}}{\theta px_{1,-1}px_1^{-\sigma}+\left(1-\theta\right)px_{2,-1}px_2^{-\sigma}}px^{CES}
\end{aligned} \tag{B.6}$$

Bilag C: Leontief prisindeks

Leontief produktionsfunktionen er givet ved:

$$X = MIN\left(\theta X_1, \left(1-\theta\right) X_2\right) \tag{C.1}$$

Dette giver følgende forhold:

$$X = \theta X_1 = \left(1-\theta\right) X_2 \tag{C.2}$$

$$X_2 = \frac{\theta}{1-\theta} X_1 \tag{C.3}$$

Det teoretiske prisindeks for Leontief funktionen er:

$$p \equiv \theta p_1 + \left(1-\theta\right) p_2 \tag{C.4}$$

Fastbaseindekset kan omskrives til:

$$\begin{aligned} p &= \frac{p_1 X_1 + p_2 X_2}{X_1 + X_2} = p_1 \frac{X_1}{X_1 + X_2} + p_2 \frac{X_2}{X_1 + X_2} \\ &= \theta p_1 + \left(1-\theta\right) p_2 \end{aligned} \tag{C.5}$$

Det kædede indeks kan omskrives til:

$$\begin{aligned} p &= p_{-1} \frac{p_1 X_1 + p_2 X_2}{p_{1,-1} X_1 + p_{2,-1} X_2} = p_{-1} \frac{\theta p_1 + \left(1-\theta\right) p_2}{\theta p_{1,-1} + \left(1-\theta\right) p_{2,-1}} \\ &= p_{-2} \frac{\theta p_{1,-1} + \left(1-\theta\right) p_{2,-1}}{\theta p_{1,-2} + \left(1-\theta\right) p_{2,-2}} \frac{\theta p_1 + \left(1-\theta\right) p_2}{\theta p_{1,-1} + \left(1-\theta\right) p_{2,-1}} \\ &= \frac{p_{-2}}{\theta p_{1,-2} + \left(1-\theta\right) p_{2,-2}} \left(\theta p_1 + \left(1-\theta\right) p_2\right) \\ &= \ldots \\ &= \theta p_1 + \left(1-\theta\right) p_2 \end{aligned} \tag{C.6}$$

Idet man udnytter, at alle priser i basisåret er lig 1.