Danmarks Statistik
MODELGRUPPEN

Arbejdspapir*

Grane Høegh

22. august 2007

Funktionel form for effektivitetsindeks i det nye forbrugssystem

Resumé:

Der findes to måder at opskrive effektivitetsudvidede CES-funktioner med to inputs. Den ene er ved at modellere det relative forhold mellem de to varer, og den anden er ved at modellere den ene vare på baggrund af det samlede budget til de to varer. I dette papir gennemgås fordele og ulemper ved de to måder, og der gives et konkret eksempel. Konklusionen er, at på grund af simulationsvanskeligheder ved den relative formulering vælges det at modellere den ene vare på baggrund af det samlede budget til de to varer.

GRH220807

Nøgleord: Forbrugssystem, nestet CES, effektivitetsindeks

1. Indledning

I dette papir gennemgås fordele og ulemper ved to forskellige formuleringer af en effektivitetsudvidet CES-funktion. Uden effektivitetsindeks kan en to-vare-CES-funktion opskrives på to ækvivalente måder. Den ene er en relation for det relative forhold, og den anden er en for den ene vare ud fra det samlede budget til de to varer. Med effektivitetsindeks er forskellen hvilken funktionel form, der ønskes. Udgangspunktet er, at der ønskes en lineær relation, hvilket betyder, at det har betydning for den funktionelle form, hvilken opskrivning der benyttes, da det teoretisk korrekte prisaggregat approksimeres med et Törnqvist prisaggregat.

Konklusionen er, at selvom opskrivning i relative forhold er at foretrække – både på grund af simultanitetsbias, og da man undgår, at benytte det kun approksimativt korrekte Törnqvist prisindeks på andet end effektivitetstrenden, så giver denne formulering simulationsproblemer. Endvidere giver opskrivningen i relative forhold lidt knas i relationen for serviceydelser versus andre forbrugsvarer, hvor den anden formulering ser ud til at have en bedre funktionel form.

I afsnit 2 gennemgås de to forskellige funktionelle former, og deres fordele og ulemper diskuteres. Et helt konkret eksempel gives i afsnit 3, hvor problemerne med serviceydelser og andre forbrugsvarer illustreres. Afsnit 4 beskriver, hvordan man muligvis kan snyde PCIM til at simulere den relative model. Endelig konkluderes i afsnit 5.

2. To funktionelle former

Der findes mindst to måder at opskrive efterspørgslen for en vare, hvor nyttefunktionen er en effektivitetsudvidet CES-funktion, jf. GRH22806. Den ene er:

$$\begin{aligned}\log x_1 = \sigma \log(\theta) - \sigma \log\left(\frac{p_1}{p_{12}}\right) \\ + \log(x_{12}) + (\sigma - 1)\log\left(e_1(x_{12})\right)\end{aligned} \tag{2.1}$$

og den anden er:

$$\log\left(\frac{x_1}{x_2}\right) = \alpha_0 - \sigma \log\left(\frac{p_1}{p_2}\right) + (\sigma - 1)\log\left(\frac{e_1(x_{12})}{e_2(x_{12})}\right) \tag{2.2}$$

Hvor priserne p_1, p_2 og den overordnede forbrugsnytte x_{12} er givet. Hermed er efterspørgslen efter begge varer x_1 og x_2 givet, blot der suppleres med to ekstra ligninger, nemlig:

$$x_2 = \frac{p_{12}}{p_2} x_{12} - \frac{p_1}{p_2} x_1 \tag{2.3}$$

$$p_{12} = F\left[p_1, p_2, x_1, x_2\right] \tag{2.4}$$

Der skal vælges en funktionel form for effektivitetsindekset. Det letteste er:

$$\log\left(e_1\left(x_{12}\right)\right)=\frac{a_{Y1}}{\sigma-1}\log\left(x_{12}\right) \tag{2.5}$$

for den første formulering og:

$$\log\left(\frac{e_1\left(x_{12}\right)}{e_2\left(x_{12}\right)}\right)=\left(\frac{a_{Y12}}{\sigma-1}-1\right)\log\left(x_{12}\right) \tag{2.6}$$

for den anden. Indsættes disse fås:

$$\log x_1=\alpha_1-\sigma\log\left(\frac{p_1}{p_{12}}\right)+\alpha_{Y1}\log\left(x_{12}\right) \tag{2.7}$$

og

$$\log\left(\frac{x_1}{x_2}\right)=\alpha_0-\sigma\log\left(\frac{p_1}{p_2}\right)+\alpha_{Y12}\log\left(x_{12}\right) \tag{2.8}$$

For at gøre alting meget nemmere benyttes et superlativt prisindeks – Törnqvistprisindekset – i stedet for det teoretisk korrekte. Dette giver stort set ingen bias i estimationen, dog kan det give inkonsistente langsigtsegenskaber. Er α_{Y1} ulig 1, så vil den i udgangspunktet være større end 1 for den ene vare og mindre end 1 for den anden. Det vi estimerer, er en gennemsnitlig elasticitet for den observerede periode.

Når der benyttes et Törnqvistprisindeks, så er de to funktionelle former forskellige. Er den første som givet af (2.5), så kan den anden umuligt være af formen givet ved (2.6), når der benyttes et prisindeks andet end det teoretisk korrekte.

En vares budgetelasticitet kan være konstant mindre end en, hvilket vil betyde, at den kommer til at udgøre en mindre og mindre andel af budgettet. Asymptotisk vil den gå mod at udgøre en uendelig lille del af budgettet. Budgetelasticiteten for den anden vare er hermed i udgangspositionen større end en, men vil i takt med at den kommer til at udgøre en større og større del af budgettet gå mod en.

Er en vares budgetelasticitet konstant større end en, så vil den vokse mere end budgettet. På et tidspunkt før endepunktet vil den udgøre en så stor andel, at den anden vare må aftage i stigende budget og til sidst blive negativ. Dette er en meget uheldig egenskab.

Altså er det vigtigt at sikre sig, at benyttes den første opskrivning, så skal det altid vælges at modellere den vare med den største budgetelasticitet residualt.

Den anden formulering er umiddelbart mere sikker. Her angives ikke en konstant indkomstelasticitet for en af varerne, men en konstant forskel på deres indkomstelasticiteter. Er varegrupperne lige store, så vil deres indkomstelasticiteter summe til 2. Har den største varegruppe en indkomstelasticitet på over en, så vil de summe til mindre end 2, og de vil summe til mere end 2, hvis den har den mindste. Den vare med en indkomstelasticitet på over 1, vil igen gå mod at fylde hele budgettet. Med en α_{Y12} numerisk mindre en 1, så vil det andet forbrugsgode gå mod at have en indkomstelasticitet på 1-α_{Y12} i takt med, at det første gode nærmer sig en indkomstelasticitet på 1. Er indkomstelasticiteten numerisk større end 1, så vil den anden vare på langt sigt gå mod at have en negativ indkomstelasticitet. Altså er det for de langsigtede egenskaber bedst at restriktere α_{Y12} til at være mellem -1 og 1. Dog kan indkomstelasticiteten på mellemlangt sigt være pæn selv med en α_{Y12} numerisk større end 1.

Umiddelbart har vi ønsket at modellere alle formler i relative forhold - altså ved hjælp af ligning (2.2). Der har været flere årsager til dette. For det første forventes simultanitetsskævheden ved estimationerne at blive mindre – mere om dette i GRH27807. For det andet mener Asger, at det vil være mest teoretisk korrekt med en Taylor approksimation for effektivitetsindeksene i det relative forhold. Ved mest teoretisk korrekt mener Asger, at problemet ved at benytte Törnqvistprisindekset bliver isoleret til trendleddet. Så umiddelbart var der enighed om at prøve denne modellering.

Det store problem opstod, da modellen skulle simuleres. Umiddelbart havde jeg tænkt mig at have boliger og brændsel i samme nest. Jeg ombestemte mig dog senere – jf. GRH06807. Modellen kunne simuleres, når der blev valgt en tilstrækkelig dæmpningsfaktor, hvilket ikke er specielt rart at være tvunget til at have inde i modellen eller for den sags skyld er særligt betryggende for simulationerne fremover.

Helt galt gik det dog først, da jeg inkluderede brændselsforbruget i systemet. Så kunne der ikke simuleres selv med dæmpningsfaktorer. Asger foreslog, at sætte den mindste af de to variabler i tælleren. Tidligere havde jeg i tælleren sat den med den mindste indkomstelasticitet. Dette hjalp dog ikke på problemet. Min umiddelbare konklusion må derfor være, at selvom det skulle lykkedes at rykke rundt på ligninger, så delsystemet kan simuleres med en dæmpningsfaktor, så vil det være for ustabilt at inkludere i den samlede formelfil. Selvom det skulle gå godt denne gang, så ligger der en potentiel trussel mod stabiliteten af systemet, og hvis det først går galt om nogle år, så kan det også tage langt tid at lokalisere, hvor det gik galt og rette op på det.

En tredje mulighed er at benytte den relative formulering, men at snige sig udenom, at skulle definere den ene vare residualt, da vi tror, det er her PCIM får problemer. Denne fremgangsmåde er endnu ikke implementeret, men hvis den virker, er det muligvis den bedste løsning. Hvordan denne fremgangsmåde vil foregå er beskrevet i afsnit 4. Den er dog estimeret på samme måde som den anden formulering af de relative forbrug, så kritikken fra afsnit 3 gælder også mod den.

3. Eksempel: Serviceydelser og andre forbrugsvarer

Forbrug eksklusiv bolig, transport og brændsel deles ud på serviceydelser og forbrugsvarer. I dette eksempel sammenlignes egenskaberne ved et system opstillet på baggrund af (2.1) med et system opstillet på baggrund af (2.2). Lige præcis dette eksempel udvælges, da det er her der er størst forskel på priselasticiteter samtidig med, at der her indføres de strengeste restriktioner på trenden i den relative relation. Udover ligningerne (2.1) og (2.2) tilføjes dog fri kortsigtsdynamik. Langsigtsrelationerne er estimeret som:

$$\log fCfv = \underset{(0.26)}{2.17} - \underset{(0.26)}{1.10} * \log\left(\frac{pcfv}{pctsfv}\right) + \underset{(0.06)}{0.34} * \log\left(fCtsfv\right) \tag{2.9}$$

$$\log\left(\frac{fCts}{fCfv}\right) = -\underset{(1.55)}{7.88} - \underset{(0.76)}{1.57} * \log\left(\frac{pcts}{pcfv}\right) + \underset{(0.36)}{1.80} * \log\left(fCtsfv\right) \tag{2.10}$$

Pålægges restriktionen med α_{Y12} mindre eller lig 1 numerisk fås:

$$\log\left(\frac{fCts}{fCfv}\right) = -\underset{(0.12)}{4.26} - \underset{(0.44)}{0.01} * \log\left(\frac{pcts}{pcfv}\right) + 1 * \log\left(fCtsfv\right) \tag{2.11}$$

For at få en rimelig langsigtet priselasticitet bindes den til at være lig den langsigtede:

$$\log\left(\frac{fCts}{fCfv}\right) = -\underset{(0.29)}{4.19} - \underset{(0.32)}{0.87} * \log\left(\frac{pcts}{pcfv}\right) + 1 * \log\left(fCtsfv\right) \tag{2.12}$$

Et par ting er umiddelbart værd at bemærke. Substitutionselasticiteten er omkring en for begge formuleringer, men lidt mere usikkert bestemt i den relative ligning. Generelt ser den relative ligning ud til at være præget af mere usikkerhed, hvilket kan tyde på, at den funktionelle form af at inkludere den lineære trend i relationen for *fCfv* fitter bedre. Endvidere kan den langsigtede trend ikke lide at blive bundet til 1 i den relative ligning.

Hver af de tre ligninger (2.9), (2.10) og (2.12) giver et bud på det strukturelle niveau for forbruget af serviceydelser givet de andre variabler. Endvidere giver alle ligninger også et bud på indkomstelasticiteten i de tre ligninger. I ligning (2.9) er den givet direkte og er lig 0,34. For de andre ligninger skal den beregnes. Disse beregnede indkomstelasticiteter afhænger af niveauet af indkomstvariablen (her: *fCptsfv*). Tabel 1 viser indkomstelasticiteterne beregnet i år 2003 og i 1967. Ved ligning (2.10) er indkomstelasticiteten faldet fra 0,35 til 0,06, mens den for ligning (2.12) er faldet fra 0,53 til 0,44. Altså er den langsigtede indkomstelasticitet meget afhængig af specifikationen og parameterrestriktioner.

Ikke så overraskende rammer den ikke-restrikterede model bedre end den restrikterede, men det ser ud til den ikke-relative model (2.9) har svært ved at forklare i starten af perioden. I 2003 har den restrikterede model (2.12) et langsigtet niveau der ligger langt fra det observerede, mens den ikke-relative model (2.9) i 1967 har et utroværdigt lavt ligevægtsniveau.

Tabel 1 viser også resultater for år 2038. Jeg har fremskrevet med uændrede priser og en stigning på 2 pct. om året i indkomstvariablen. Forbruget af andre varer, *fCpfv*, er givet ud fra budgetbetingelsen:

$$fCfv = \frac{pctsfv}{pcfv} fCtsfv - \frac{pcts}{pcfv} fCts \tag{2.13}$$

med uændrede priser og en stigning i forbruget på 2 pct. om året.

Tabel 1. Langsigtede niveauer og indkomstelasticiteter i de tre modeller.

	fCts/U	fCfv/U	pcts	pcfv	fCtsfv/ U	pctsfv	Indk.elast. for fCfv
2003 Faktisk	40.61	42.4	1.05	1.05	83.01	1.05	
(2.9)	43.66	39.35	1.05	1.05	83.01	1.05	0.34
(2.10)	43.04	39.97	1.05	1.05	83.01	1.05	0.06
(2.12)	46.24	36.77	1.05	1.05	83.01	1.05	0.44
2038 (2.9)	116.21	49.81	1.05	1.05	166.02	1.05	0.34
(2.10)	131.07	34.95	1.05	1.05	166.02	1.05	-0.42
(2.12)	118.78	47.24	1.05	1.05	166.02	1.05	0.28
1967 Faktisk	17.55	29.44	0.16	0.2	47.67	0.18	
(2.9)	6.02	41.65	0.16	0.2	47.67	0.18	0.34
(2.10)	17.18	30.49	0.16	0.2	47.67	0.18	0.35
(2.12)	22.27	25.40	0.16	0.2	47.67	0.18	0.53

For den urestrikterede relative model (2.10) falder indkomstelasticiteten til under nul og er -0,42 i 2038 i fremskrivningen. Det virker utroværdigt med en impliceret indkomstelasticitet for andre varer under nul. Samtidig bliver den endda af en ret høj størrelse i den urestrikterede model.

Konklusionerne fra dette afsnit må være, 1) at den funktionelle form for effektivitetseffekt har stor indflydelse, 2) at det er nødvendigt at restriktere den relative model for ikke at få utroværdige effekter, 3) restriktionerne har stor betydning for de implicerede langsigtede elasticiteter.

Alt i alt er ovenstående konklusion ikke særligt betryggende. For ikke at få utroværdige egenskaber skal man i den relative model påtvinge restriktioner i modstrid med empirien. Min holdning er, at så skal man hellere benytte den ikke relative model. Denne påtvinger måske en urealistisk antagelse om en konstant indkomstelasticitet for andre varer, men i det mindste har man så ret meget snor i, hvad den er og undgår andre restriktioner på denne parameter.

4. Den tredje vej; eller hvordan man muligvis kan snyde PCIM

Dette afsnit vil opstille en alternativ formulering, som dog stadig er at opstille modellen som relative forbrug. Formålet er at få skrevet nogle ligninger som PCIM ikke går ned af.

I JAO10D00 vises det, at for CES-funktionen gælder følgende ligning:

$$\frac{C}{p_1 x_1} - 1 = \left(\frac{\theta}{1-\theta}\right)^{-\sigma} \left(\frac{p_1}{p_2}\right)^{\sigma-1} \qquad (2.14)$$

hvor notationen følger den fra GRH22806.

Med effektivitetsindeks bliver ligningen:

$$\begin{aligned}\frac{C}{p_1 x_1} - 1 &= \left(\frac{\theta}{1-\theta}\right)^{-\sigma}\left(\frac{p_1/e_1}{p_2/e_2}\right)^{\sigma-1} \\ &= \left(\frac{\theta}{1-\theta}\right)^{-\sigma}\left(\frac{p_1}{p_2}\right)^{\sigma-1} e^{1-\sigma}\end{aligned} \tag{2.15}$$

hvor $e = e_1 / e_2$. Her kan efterspørgslen efter vare 1 isoleres:

$$x_1 = \frac{1}{1+\left(\frac{\theta}{1-\theta}\right)^{-\sigma}\left(\frac{p_1}{p_2}\right)^{\sigma-1} e^{1-\sigma}}\frac{C}{p_1} \tag{2.16}$$

På tilsvarende måde kan efterspørgslen efter vare 2 findes som:

$$x_2 = \frac{1}{1+\left(\frac{\theta}{1-\theta}\right)^{\sigma}\left(\frac{p_1}{p_2}\right)^{1-\sigma} e^{\sigma-1}}\frac{C}{p_2} \tag{2.17}$$

Det relative forbrug var jf. GRH22806 givet ved:

$$\frac{x_1}{x_2} = \left(\frac{\theta}{1-\theta}\right)^{\sigma}\left(\frac{p_1}{p_2}\right)^{-\sigma} e^{\sigma-1} \tag{2.18}$$

hvilket kan omskrives til:

$$\frac{p_1 x_1}{p_1 x_2} = \left(\frac{\theta}{1-\theta}\right)^{\sigma}\left(\frac{p_1}{p_2}\right)^{1-\sigma} e^{\sigma-1} \equiv xlr\left(p_1, p_2, e\right) \tag{2.19}$$

Altså kan efterspørgslerne skrives som:

$$x_1 = \frac{1}{1+xlr^{-1}}\frac{C}{p_1} \tag{2.20}$$

$$x_2 = \frac{1}{1+xlr}\frac{C}{p_2} \tag{2.21}$$

Som i GRH22806 ønskes det dog kun at beskrive den langsigtede efterspørgsel på denne måde. Den kortsigtede efterspørgsel ønskes givet ved:

$$\begin{aligned}D\log\left(\frac{x_{1,t}}{x_{2,t}}\right) &= \phi_P D\log\left(\frac{p_{1,t}}{p_{2,t}}\right) + \phi_E D\log\left(e_t\right) \\ &-\gamma\left(\log\left(\frac{x_{1,t-1}}{x_{2,t-1}}\right) - \log\left(\frac{x_{1,t-1}}{x_{2,t-1}}\right)^*\right)\end{aligned} \tag{2.22}$$

hvilket kan omskrives til:

$$\frac{x_{1,t}}{x_{2,t}} / \frac{x_{1,t-1}}{x_{2,t-1}} = \left(\frac{p_{1,t}}{p_{2,t}} / \frac{p_{1,t-1}}{p_{2,t-1}}\right)^{\phi_P}\left(\frac{e_t}{e_{t-1}}\right)^{\phi_E}\left(\frac{x_{1,t-1}}{x_{2,t-1}} / xlr_{t-1}\right)^{-\gamma} \tag{2.23}$$

og igen til:

$$\frac{p_{1,t}x_{1,t}}{p_{2,t}x_{2,t}} = \left(\frac{p_{1,t}}{p_{2,t}} / \frac{p_{1,t-1}}{p_{2,t-1}}\right)^{\phi_P-1}\left(\frac{e_t}{e_{t-1}}\right)^{\phi_E}\left(\frac{x_{1,t-1}}{x_{2,t-1}} / \chi_{t-1}\right)^{-\gamma}\frac{p_{1,t-1}x_{1,t-1}}{p_{2,t-1}x_{2,t-1}} \equiv xsr_t \tag{2.24}$$

Vare 1 kan isoleres, hvilket giver:

$$x_{1,t} = \frac{xsr_t}{p_{1,t}} p_{2,t} x_{2,t} \tag{2.25}$$

Dette kan indsættes i budgetbetingelsen:

$$p_{1,t} x_{1,t} + p_{2,t} x_{2,t} = C \tag{2.26}$$

De to varer kan isoleres og efterspørgslen efter de to varer kan findes som:

$$x_{1,t} = \frac{1}{1+xsr_t^{-1}} \frac{C}{p_{1,t}} \tag{2.27}$$

$$x_{2,t} = \frac{1}{1+xsr_t} \frac{C}{p_{2,t}} \tag{2.28}$$

hvor

$$\log xlr_t = a_0 + (1-\sigma)\log\left(\frac{p_{1,t}}{p_{2,t}}\right) + (\sigma-1)\log(e_t) \tag{2.29}$$

$$\begin{aligned} D\log(xsr_t) = (\phi_P - 1) D\log\left(\frac{p_{1,t}}{p_{2,t}}\right)^{\phi_P - 1} + \phi_E D\log(e_t) \\ -\gamma\left(\log\left(\frac{x_{1,t-1}}{x_{2,t-1}}\right) - \log(xlr_{t-1})\right) \end{aligned} \tag{2.30}$$

Ovenstående formulering har samme egenskaber som den model, der ikke kan simuleres. Til gengæld er den blevet opskrevet i PCIM og der kunne uden problemer simuleres. Altså er den et robust alternativ. Meget tyder på, at denne formulering bliver den der vælges. Der er dog stadig spørgsmålet om, hvordan J-leddene sættes og flere mindre detaljer, der skal afgøres.

5. Konklusion

CES-efterspørgselsfunktionen kan opskrives både som en relativ ligning og som en ligning på baggrund af det aggregerede forbrug af de to komponenter. Begge dele er forsøgt. Opstillingen af det relative forbrug kræver, at man i PCIM er lidt mere kreativ, men begge dele kan lykkedes. Umiddelbart ser det ud til, at den mere kreative metode, hvor det relative forbrug opstilles er den, der vil blive benyttet.

Ved modelgruppemødet kom det frem, at Thomas Thomsen også benytter metoden beskrevet i afsnit 4 i EMMA, og at den virker upåklageligt. Spørgsmålet drejer derfor mere i retning af en diskussion om funktionel form på effektivitetsindekset og mindre i retning af, hvad der kan simuleres i PCIM. Mere om dette i GRH10807.