Danmarks Statistik
MODELGRUPPEN

Arbejdspapir*

Edith Madsen

24. maj 1996

Udledning af faktorefterspørgselsfunktioner fra tre-faktor "nestet" CES-produktionsfunktion

Resumé:

Udledning af de optimale niveauer af de tre produktionsfaktorer, når produktionsfunktionen er en "nestet" CES-funktion.

g:\edm\modelpap\prod.wp

Nøgleord: faktorblokken, produktionsfaktorer, CES-funktioner, optimering, udledninger

1. Indledning

I dette papir gennemgås løsningen af det Lagrange-optimeringsproblem, som fremkommer, når man har en "nestet" CES-produktionsfunktion og skal bestemme de optimale niveauer af produktionsfaktorerne.
Papiret kan opfattes som baggrundsmateriale til kapitel 8 i ADAM mar 95-dokumentationen.[1]

2. Løsning af problemet

Optimeringsproblemet ser ud på følgende måde:

$$\min\ (P_K \cdot K + P_L \cdot L + P_E \cdot E)$$
$$\text{st}\ Y = \kappa_1 \cdot Y_{KLE}\ , \quad \kappa_1 > 0$$

hvor

$$Y_{KLE} = \left[\delta_2 Y_{KL}^{\frac{\sigma_2 - 1}{\sigma_2}} + (1-\delta_2) E^{\frac{\sigma_2 - 1}{\sigma_2}} \right]^{\frac{\sigma_2}{\sigma_2 - 1}}, \quad \sigma_2 > 0,\ 0 < \delta_2 < 1 \tag{1}$$

$$Y_{KL} = \left[\delta_1 K^{\frac{\sigma_1 - 1}{\sigma_1}} + (1-\delta_1) L^{\frac{\sigma_1 - 1}{\sigma_1}} \right]^{\frac{\sigma_1}{\sigma_1 - 1}}, \quad \sigma_1 > 0,\ 0 < \delta_1 < 1 \tag{2}$$

Vi opstiller Lagrangefunktionen for problemet:

$$\mathrm{L}(K,L,E) = P_K \cdot K + P_L \cdot L + P_E \cdot E - \lambda \cdot \kappa_1 \cdot Y_{KLE} \tag{3}$$

Denne funktion er konveks, så 1. ordensbetingelserne er tilstrækkelige betingelser for en løsning.

1. ordensbetingelserne for løsning af problemet er:

$$P_K = \lambda \cdot \kappa_1 \frac{\partial Y_{KLE}}{\partial K} \tag{4a}$$

$$P_L = \lambda \cdot \kappa_1 \frac{\partial Y_{KLE}}{\partial L} \tag{4b}$$

[1] I papirerne TTH, KTH, JSM: *Sammenligning af 2. generations translog- og CES-estimationer*, 20. november 1993 (side 6-9) samt PBR: *Kort- og langsigtsfaktorefterspørgselsfunktioner baseret på CES produktionsfunktion*, 8. juni 1993, er det samme udledt for en model med en fire-faktor "nestet" CES-produktionsfunktion.

$$P_E = \lambda \cdot \kappa_1 \frac{\partial Y_{KLE}}{\partial E} \tag{4c}$$

Udtryk for de partielle afledede:

$$\frac{\partial Y_{KLE}}{\partial K} = \frac{\partial Y_{KLE}}{\partial Y_{KL}} \frac{\partial Y_{KL}}{\partial K} = \delta_1 \ \delta_2 \ Y_{KLE}^{\frac{1}{\sigma_2}} \ Y_{KL}^{\frac{\sigma_2 - \sigma_1}{\sigma_1 \sigma_2}} \ K^{-\frac{1}{\sigma_1}} \tag{5a}$$

$$\frac{\partial Y_{KLE}}{\partial L} = \frac{\partial Y_{KLE}}{\partial Y_{KL}} \frac{\partial Y_{KL}}{\partial L} = (1-\delta_1) \ \delta_2 \ Y_{KLE}^{\frac{1}{\sigma_2}} \ Y_{KL}^{\frac{\sigma_2 - \sigma_1}{\sigma_1 \sigma_2}} \ L^{-\frac{1}{\sigma_1}} \tag{5b}$$

$$\frac{\partial Y_{KLE}}{\partial E} = (1-\delta_2) \ Y_{KLE}^{\frac{1}{\sigma_2}} \ E^{\frac{-1}{\sigma_2}} \tag{5c}$$

Problemet løses nu ved først at finde de optimale niveauer af K og L for fast niveau af Y_{KL}. Derefter findes de optimale niveauer af E og Y_{KL} for fast Y_{KLE}.

Ved division af (4a) med (4b) fås følgende udtryk for det optimale forhold mellem K og L:

$$\frac{K}{L} = \left(\frac{\delta_1}{1-\delta_1}\right)^{\sigma_1} \left(\frac{P_L}{P_K}\right)^{\sigma_1} \tag{6}$$

Dette indsættes i ligning (2), udtrykket for Y_{KL}, og man kan så bestemme K^* og L^*, det optimale niveau af henholdsvis K og L. Man får:

$$K^* = Y_{KL} \ \delta_1^{\frac{\sigma_1}{1-\sigma_1}} \left[\left(\frac{P_L}{P_K}\right)^{1-\sigma_1} \left(\frac{1-\delta_1}{\delta_1}\right)^{\sigma_1} + 1\right]^{\frac{\sigma_1}{1-\sigma_1}} \tag{7}$$

$$L^* = Y_{KL} \ (1-\delta_1)^{\frac{\sigma_1}{1-\sigma_1}} \left[\left(\frac{P_K}{P_L}\right)^{1-\sigma_1} \left(\frac{\delta_1}{1-\delta_1}\right)^{\sigma_1} + 1\right]^{\frac{\sigma_1}{1-\sigma_1}} \tag{8}$$

Ved division af (4a) med (4c) og indsættelse af det lige fundne udtryk for K^*, ligning (7), fås følgende udtryk for det optimale forhold mellem E og Y_{KL}:

$$\frac{Y_{KL}}{E} = \left(\frac{\delta_2}{1-\delta_2}\right)^{\sigma_2}\left(\frac{P_E}{P_{KL}}\right)^{\sigma_2} \tag{9}$$

idet

$$\begin{aligned} K^* &= Y_{KL}\ \delta_1^{\frac{\sigma_1}{1-\sigma_1}} \left[\left(\frac{P_L}{P_K}\right)^{1-\sigma_1}\left(\frac{1-\delta_1}{\delta_1}\right)^{\sigma_1} + 1\right]^{\frac{\sigma_1}{1-\sigma_1}} \\ &= Y_{KL}\ \delta_1^{\sigma_1}\left(\frac{P_{KL}}{P_K}\right)^{\sigma_1} \end{aligned}$$

med

$$P_{KL} = \left[\delta_1^{\sigma_1} P_K^{1-\sigma_1} + (1-\delta_1)^{\sigma_1} P_L^{1-\sigma_1}\right]^{\frac{1}{1-\sigma_1}} \tag{10}$$

Udtrykket i ligning (9) indsættes i udtrykket for Y_{KLE}, ligning (1), og de optimale niveauer af E og Y_{KL} bestemmes som funktioner af produktionsniveau Y, priser og parametre. Man får:

$$\begin{aligned} E^* &= \frac{Y}{\kappa_1}\ (1-\delta_2)^{\frac{\sigma_2}{1-\sigma_2}} \left[\left(\frac{P_{KL}}{P_E}\right)^{1-\sigma_2}\left(\frac{\delta_2}{1-\delta_2}\right)^{\sigma_2} + 1\right]^{\frac{\sigma_2}{1-\sigma_2}} \\ &= \frac{Y}{\kappa_1}\ (1-\delta_2)^{\sigma_2}\left(\frac{P_{KLE}}{P_E}\right)^{\sigma_2} \end{aligned} \tag{11}$$

$$\begin{aligned} Y_{KL}^* &= \frac{Y}{\kappa_1}\ \delta_2^{\frac{\sigma_2}{1-\sigma_2}} \left[\left(\frac{P_E}{P_{KL}}\right)^{1-\sigma_2}\left(\frac{1-\delta_2}{\delta_2}\right)^{\sigma_2} + 1\right]^{\frac{\sigma_2}{1-\sigma_2}} \\ &= \frac{Y}{\kappa_1}\ \delta_2^{\sigma_2}\left(\frac{P_{KLE}}{P_{KL}}\right)^{\sigma_2} \end{aligned} \tag{12}$$

med

$$P_{KLE} = \left[\delta_2^{\sigma_2} P_{KL}^{1-\sigma_2} + (1-\delta_2)^{\sigma_2} P_E^{1-\sigma_2}\right]^{\frac{1}{1-\sigma_2}} \tag{13}$$

Det bemærkes at udtrykket for Y_{KL}^* selvfølgelig også kan fås ved at indsætte de optimale niveauer af K og L fra ligningerne (7) og (8) i udtrykket for Y_{KL} ligning (2).