Danmarks Statistik
MODELGRUPPEN

Arbejdspapir*

Erik Bjørsted
Martin Junge

17. Februar 2006

Trendspecifikationer i faktorblokken

Resumé:

Papiret er ét i rækken af flere, som ser på muligheden for at erstatte vores nuværende effektivitetsindeks i faktorblokken for kapital og arbejdskraft med en trend for produktiviteten samt en vridende trend.

Vi finder en trend for K/L-forholdet, som kan bruges til at styre dette forhold, men vi finder ikke en rigtig produktivitetstrend (TFP), men derimod en trend for Y/L-forholdet, som er identisk med vores nuværende trend på arbejdskraften, L.

Papiret skal ses som et appendiks til TTH10305, hvor en anden løsning på problemstillingen omkring udskiftningen af vores nuværende trender præsenteres.

Papirets hovedformål er at dokumentere nogle af de baner vi har tænkt i undervejs i forløbet.

EBJ17206.WPD

Nøgleord: Faktorblok, CES, maskinkapital, arbejdskraft, effektivitetsindeks

1. Indledning

Som omtalt i EBJ23n05 er der adskillelige af vores kunder, som vælger at eksogenisere faktorblokken, når de skal lave fremskrivninger. Èt af problemerne for vores kunder er fortolkningen af vores effektivitetsindeks for kapitalapparatet. Estimationerne tilsiger nemlig at vækstraten i effektiviteten af maskinkapital skulle være negativ (effektiviteten af arbejdskraften estimeres i øvrigt til at være voksende). Med andre ord skulle effektiviteten af maskinkapital altså falde over tid, hvilket ingenlunde virker inutuitivt plausibelt. TTH10305 peger på, at hvis man ser bort fra de relative faktorpriser, er forklaringen sandsynligvis den, at den teknologiske udvikling går i retning af at være arbejdskraftbesparende og mere kapitalintensiv. Det har så videre den konsekvens, når man estimerer, at kapitaleffektiviteteten kommer ud med negativ vækstrate. TTH10305 peger videre på, at effektiviteten af kapital ikke bør betragtes isoleret fra effektiviteten af arbejdskraft men at den *sammenvejede* effektivitet af kapital og arbejdskraft er positiv, og har en bias i retning af være arbejdskraftbesparende og mere kapitalintensiv.

Papiret her ser derfor på muligheden for at erstatte de nuværende trender for kapital og arbejdskraft, dels med en trend for produktivitet og en trend, som kan bruges til at styre forholdet mellem kapital og arbejdskraft - en såkaldt vridende trend. Håbet er, at kunne identificere sådanne trender, som fanger den ovenfor beskrevne tendens, nemlig at den *sammenvejede* effektivitet af kapital og arbejdskraft er positiv, og har en bias i retning af være arbejdskraftbesparende og mere kapitalintensiv.

Papirets opbygning er som følger: Først repeteres den nuværende modellering af ligningerne for kapital- og arbejdskraftsefterspørgslen (afsnit 2). Dernæst ser vi på en alternativ formulering, hvor trenderne på kapital og arbejdskraft er udskiftet med en trend for *Y*/*L* og en trend for *K*/*L* (afsnit 3) og endelig konkluderes papiret (afsnit 4).

2. Nuværende modellering

I den nuværende modellering af erhvervenes efterspørgsel efter arbejdskraft og kapital i ADAM, opererer man med dis-embodied trender på arbejdskraften og kapital:

$$Y = F\left(e_L L, e_K K\right) \tag{1}$$

Funktionen, *F* er en CES-produktionsfunktion, som ser således ud:

$$F(e_K K, e_L L) = \varepsilon\left[\delta(e_K K)^{\frac{\sigma-1}{\sigma}} + (1-\delta)(e_L L)^{\frac{\sigma-1}{\sigma}}\right]^{\frac{\sigma}{\sigma-1}},\ \varepsilon > 0, \sigma > 0, 0 < \delta < 1 \tag{2}$$

Parameteren, σ, er substitutionselasticiteten, δ er fordelingsparameteren og ε er en skaleringsparameter.

De langsigtede/optimale efterspørgsler efter kapital og arbejdskraft udledes ved at minimere de samlede omkostninger $p_L L + p_K K$, under bibetingelse af (1), hvilket giver følgende efterspørgselsligninger:

$$K^* = \frac{1}{e_K}\delta^{\frac{\sigma}{1-\sigma}}\frac{X}{\varepsilon}\left[\left(\frac{P_L / e_L}{P_K / e_K}\right)^{1-\sigma}\left(\frac{1-\delta}{\delta}\right)^{\sigma}+1\right]^{\frac{\sigma}{1-\sigma}}$$

$$L^* = \frac{1}{e_L}(1-\delta)^{\frac{\sigma}{1-\sigma}}\frac{X}{\varepsilon}\left[\left(\frac{P_K / e_K}{P_L / e_L}\right)^{1-\sigma}\left(\frac{\delta}{1-\delta}\right)^{\sigma}+1\right]^{\frac{\sigma}{1-\sigma}} \tag{3}$$

Ligningerne i (3) udtrykker den langsigtede optimale efterspørgsel efter produktionsfaktorerne L og K. Den dynamiske tilpasning af arbejdskraft og kapital mod de langsigtede optimale niveauer er modelleret som følger:

På det korte sigt er kapital en træg faktor, som langsomt tilpasser sig sit langsigtsniveau via en fejlkorrektionsligning:

$$D\log(K) = \alpha D\log(K) - \gamma\left[\log(K_{-1}) - \log(K^*_{-1})\right] + u_K \tag{4}$$

Fejlkorrektionsleddet, $\gamma\left[\log(K_{-1}) - \log(K^*_{-1})\right]$, sikrer at kapitalen, K, på langt sigt rammer den optimale kapitalefterspørgsel, K^*.

På det korte sigt antager vi, at arbejdskraften kompenserer for den træge faktor, kapital, således at vi holder os på produktionsfunktionen - dvs. efterspørgslen efter arbejdskraft, L, fastsættes, så bibetingelsen (1) er opfyldt.

For et givent kapitalapparat, K, er det nødvendigt at efterspørge arbejdskraften, L^+, somer givet ved:[1]

$$L^+ = \frac{1}{e_L}\left[\frac{1}{1-\delta}\left(\frac{Y}{\varepsilon}\right)^{\frac{\sigma-1}{\sigma}} - \frac{\delta}{1-\delta}\left(e_K K\right)^{\frac{\sigma-1}{\sigma}}\right]^{\frac{\sigma}{\sigma-1}} \tag{5}$$

Erfaringsmæssigt vil data ikke acceptere, at arbejdskraften øjeblikkeligt tilpasser sig den nødvendige arbejdskraft. Vi tillader derfor en lille træghed i form af tre år i arbejdskraftens tilpasning til den nødvendige arbejdskraft, L^+. Tilpasningen har vi valgt skal foregå i antal mand, L/H, hvor H er den gennemsnitlige arbejdstid. Denne antagelse skyldes, at trægheden i arbejdskraften formodes at knytte sig til antallet af medarbejdere snarere end antallet af timer.

---

[1] Findes ved at løse (1) for L.

$$\log(L/H) = \beta_1 \log(L^+/H) + \beta_2 \log(L^+_{-1}/H_{-1}) + (1-\beta_1-\beta_2)\log(L^+_{-2}/H_{-2}) + u_L \quad (6)$$

I estimationen af (4) og (6) tillader vi autokorrelation af første orden - dvs. vi tillader,
at:

$$\begin{aligned} u_L &= \rho_L u_{L,-1} + \varepsilon_L \\ u_K &= \rho_K u_{K,-1} + \varepsilon_K \end{aligned} \quad (7)$$

hvor $(\varepsilon_L, \varepsilon_K) \sim iidN_2(0,\Omega)$.

2.1 Estimation

Vi reestimerer nu ligningerne (3)-(6) for ADAMs *nm*-erhverv. Datagrundlaget er ADAMs seneste databank i 1995-priser, og datagrundlaget for de enkelte variabler fremgår af nedenstående tabel:

Tabel 1. Datagrundlag

	ADAM-vaiabel
Produktion, Y	*fXnm*
Kapital, K	*fKmnm*
Arbejdskraft, L	*Hqnm*1
Gennemsnitlig arbejdstid, H	*Hgnm*
Prisen på arbejdskraft, p_L	*lnm*1
Prisen på kapital, p_K	*uimnm*

Trenderne specificerer vi på følgende vis:

$$\begin{aligned} e_K &= \exp(K_1 t + K_2 t^2 + .. + K_6 t^6) \\ e_L &= \exp(L_1 t + L_2 t^2 + .. + L_6 t^6) \end{aligned} \quad (8)$$

Tiden, t, er normeret, så t = -1 i 1970 (første år i estimationsperioden) og t = 0 i 2000 (sidste år i estimationsperioden).[2]

[2] t = (*tid*-2000)/30

Trenderne er pålagt den restriktion, at vækstraterne i trendindeksene er konstante i start- og slutåret af estimationsperioden, således at man undgår alt for urealistiske vækstrater i trenderne. [3]

Graderne af tidspolynomierne i (8) er i øvrigt sat til 4 og 5 for hhv. kapital og arbejdskraft - dvs. at det yderligere skal gælde, at $K_5 = K_6 = 0$ og $L_6 = 0$ i (8).

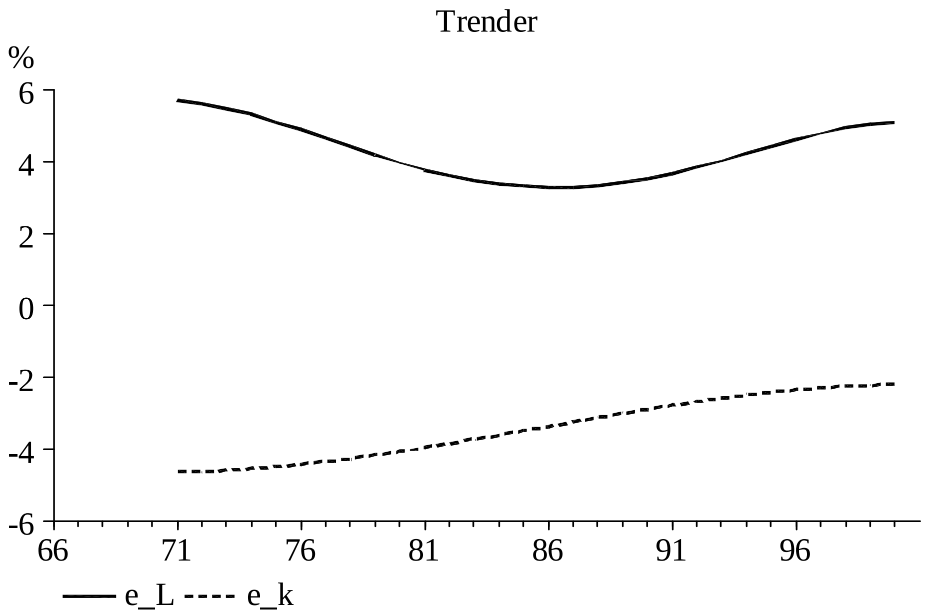
Estimationsresultaterne fremgår af nedenstående tabel - trendvækstraterne er vist i figur 1.

Tabel 2. Estimationsresultater

	Estimat	Spredning
Substitutionselasticitet, σ	0.4568	0.1498
Fordelingsparameter, δ	0.3116	0.0694
Skaleringsparameter, ε	1.1084	0.0229
Kortsigtseffekt på kapital, α	0.1384	0.0276
Tilpasning, kapital, γ	0.2166	0.0393
Førsteårseffekt, arb.kraft, β_1	0.6006	0.0602
Andenårseffekt, arb.kraft, β_2	-0.1520	0.0572
Autokorrelation, u_L	0.5178	0.1680
Autokorrelation, u_K	0.2898	0.2169

[3]At vækstraten i fx trenden for K, skal være konstant i startåret, t = -1, indebærer, at $\left.\frac{\partial^2 \log(e_K)}{\partial t^2}\right|_{t=-1} = 0$ (husk, at $\partial \log(e_K)/\partial t$ er vækstraten i trenden, hvorfor den anden aflede, accelerationen i trenden, skal være nul for at vækstraten kan forblive konstant). Det giver følgende betingelse: $K_4 = (-2K_2 + 6K_3 + 20K_5 - 30K_6)/12$. For $t = 0$ er betingelsen om konstant vækstrate opfyldt for $K_2 = 0$. På samme måde får man, at det om parametrene i trenden for L skal gælde, at $L_4 = (-2L_2 + 6L_3 + 20L_5 - 30L_6)/12$ og $L_2 = 0$

Figur 1. Vækstraterne i trenderne for *L* og *K*



Her kan vi se, at vækstraten i trenden for maskinkapital, *K*, vitterligt estimeres til at være negativ.

3. Ny trendspecifikation

Modellen kan omformuleres, således, at vi i stedet for trender på kapital og arbejdskraft, opererer med en trend for *Y*/*L* og en for *K*/*L*.

Lad som før *Y* betegne produktionen, *K* kapitalappratet og *L* arbejdskraften målt i timer. Vi antager nu, at produktionen pr. time, $y = Y/L$, er givet ved:

$$y = e_y F\left(e_k k, 1\right) = f\left(e_k k\right) \tag{9}$$

hvor

k Forholdet mellem *K* og *L*, *K*/*L*
e_y Trend for udviklingen i $y = Y/L$
e_k Trend for udviklingen i *K*/*L*

F tænker vi os er en CES-produktionsfunktion, som på intensiv form ser således ud:

$$F(e_k k, 1) = \varepsilon \left[\delta (e_k k)^{\frac{\sigma-1}{\sigma}} + (1-\delta) \right]^{\frac{\sigma}{\sigma-1}}, \quad \varepsilon > 0, \sigma > 0, 0 < \delta < 1 \tag{10}$$

Den optimale sammensætning af *K* og *L* findes ligesom før ved at minimere omkostningerne, $C = p_K K + p_L L$, men nu under bibetingelse af (9).

På forhånd forventes en positiv vækst i trenden for $y = Y/L$, svarende til en voksende produktivitet henover tid, og tilsvarende en negativ vækst i trenden for K/L, svarende til et voksende K/L-forhold.

Hvordan adskiller denne formulering af problemet sig fra formuleringen i foregående afsnit?

Svar: Da objektfunktionen (omkostningsfunktionen) er den samme, er de to problemer ækvivalente hvis og kun hvis $e_L = e_y$ og $e_K = e_y e_k$., idet bibetingelserne (1) og (9) da er ækvivalente. Det sidste følger af, at $F(.)$ har konstant skalafkast. Under konstant skalafkast gælder det jo, at

$$Y = F\left(e_K K, e_L L\right) = e_L L F\left(\frac{e_K}{e_L}\frac{K}{L}, 1\right) \Leftrightarrow$$

$$y \equiv \frac{Y}{L} = e_L F\left(\frac{e_K}{e_L}\frac{K}{L}, 1\right) = e_y F\left(e_k k, 1\right), \tag{11}$$

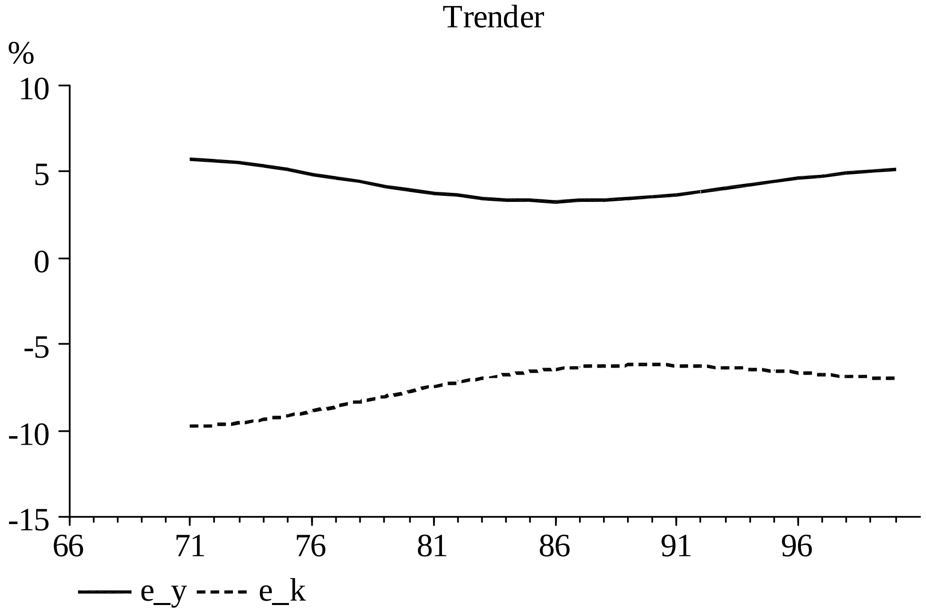
hvor

$$e_y = e_L, e_k = \frac{e_K}{e_L}, k = \frac{K}{L}$$

Ud fra ligningerne i (11), kan man altså ud fra de trender vi allerede har estimeret i afsnit 2, beregne en trend for Y/L (e_y), og én for K/L (e_k).

Gør man det får man følgende billede:

Figur 2. Vækstrater i trenderne for *y* og *k*



Med den "nye" specifikation af trenderne får man følgende langsigtede optimale efterspørgsler efter kapital og arbejdskraft:

$$
\begin{aligned}
K^* &= \frac{1}{e_y e_k}\frac{Y}{\varepsilon}\delta^{\frac{\sigma}{1-\sigma}}\left[\left(\frac{p_L}{p_K}e_k\right)^{1-\sigma}\left(\frac{1-\delta}{\delta}\right)^{\sigma}+1\right]^{\frac{\sigma}{1-\sigma}} \\
L^* &= \frac{1}{e_y}\frac{Y}{\varepsilon}(1-\delta)^{\frac{\sigma}{1-\sigma}}\left[\left(\frac{p_K}{p_L e_k}\right)^{1-\sigma}\left(\frac{\delta}{1-\delta}\right)^{\sigma}+1\right]^{\frac{\sigma}{1-\sigma}}
\end{aligned}
\tag{12}
$$

Den dynamiske tilpasning af arbejdskraft og kapital henimod de optimale/langsigtede niveauer foregår som i foregående afsnit - dvs. ligningerne (4) og (6).

Trenderne specificeres som følger:

$$
\begin{aligned}
e_k &= \exp(k_1 t + k_2 t^2 + .. + k_6 t^6) \\
e_y &= \exp(y_1 t + y_2 t^2 + .. + y_6 t^6)
\end{aligned}
\tag{13}
$$

Får man de samme trender, hvis man i stedet for at beregne dem via formlerne i (11) estimerer efterspørgselsligningerne, og bliver de øvrige parameterestimater de samme, som i afsnit2, tabel 2, hvor vi opererede med trender på hhv. arbejdskraft og maskinkapital?

Hvis endepunktrestriktionerne på trenderne er de samme, som i afsnit 2 (dvs. hvis vækstraterne i trenderne i start- og slutåret af estimationsperioden er konstante), og tidspolynomierne i de oprindelige trender for *K* og *L* har samme grad, er svaret et rungende "ja".

Hvis graden i de oprindelige tidspolynomier i trenderne for *K* og *L* derimod ikke er de samme, hvilket de generelt ikke er i faktorblokken (graden i polynomiet for K er sat til 4, mens den er 5 for arbejdskraften), skal der en restriktion til at sikre, at sammenhængen i (11) mellem trenderne holder og estimaterne bliver de samme som i tabel 2.

Det ser vi på i det følgende:

3.1 Restriktioner på trenderne

Som påpeget skal det gælde, at $e_L = e_y$ og $e_K = e_y e_k$ for at de to problemer er ækvivalente. Om trenden, e_y, skal derfor gælde de samme restriktioner som for e_L - dvs. at tidspolynomiet skal være af grad 5 - hvorfor $y_6 = 0$. Endvidere skal det gælde, at vækstraten i trenden er konstant i start- og slutåret af estimationsperioden. For start- og slutåret skal det således gælde, at

$$\left.\frac{\partial^2 \log(e_y)}{\partial t^2}\right|_{t=-1} = 0$$
$$\left.\frac{\partial^2 \log(e_y)}{\partial t^2}\right|_{t=0} = 0 \qquad (14)$$

Udregning af venstresiden af (14) for t = -1 giver, at:[4]

$$y_4 = -\frac{1}{12}\left(2y_2 - 6y_3 - 20y_5\right) \qquad (15)$$

For slutåret, t = 0 er kravet om konstant vækstrate opfyldt for $y_2 = 0$.

Restriktionerne for den vridende trend, e_k, finder man på følgende facon:

Det skal gælde, at $e_K = e_k e_y$. Da $e_y = e_L$ fås derfor, at [5]

$$e_K = e_L e_k = \exp\left[\left(k_1 + L_1\right)t + \left(k_3 + L_3\right)t^3 + \left(k_4 + L_4\right)t^4 + \left(k_5 + L_5\right)t^5 + k_6 t^6\right] \qquad (16)$$

Hvis tidspolynomiet i e_K skal have graden 4, skal $k_5 = -L_5$ og $k_6 = 0$. Den vridende trend, e_k skal altså have formen:

$$e_k = \exp\left(k_1 t + k_2 t^2 + k_3 t^3 + k_4 t^4 - L_5 t^5\right) \qquad (17)$$

Givet, at vækstraterne af trenderne i start- og slutåret af estimationsperioden skal være konstante skal det gælde, at

$$\left.\frac{\partial^2 \log\left(e_k\right)}{\partial t^2}\right|_{t=-1} = 0$$
$$\left.\frac{\partial^2 \log\left(e_k\right)}{\partial t^2}\right|_{t=0} = 0 \qquad (18)$$

For t = -1 fås, at

[4] Husk, at $y_6 = 0$, da graden af polynomiet skal være 5

[5] Husk, at $K_2 = L_2 = 0$

$$k_4 = -\frac{1}{12}\left(2k_2 - 6k_3 + 20L_5\right) \tag{19}$$

For t = 0 får man, at k_2 = 0 for at vækstraten kan være konstant.

Opsummering:
Hvis man pålægger trenderne e_y og e_k restriktionerne; $y_2 = k_2 = 0$ samt (15) og (19), får man de samme estimater gengivet i tabel 2.

4. Hvad kan vi bruge trenderne e_y og e_k til?

Trenden for k, e_k, kan bruges til at styre forholdet mellem kapital og arbejds-kraft. Hvis man dividerer K^* med L^* i (12) fås, at:

$$\begin{gathered}\frac{K^*}{L^*} = \left(\frac{p_L}{p_K}\right)^{\sigma} e_k^{\sigma-1}\left(\frac{\delta}{1-\delta}\right)^{\sigma} \Rightarrow \\ \log\left(\frac{K^*}{L^*}\right) = -\sigma\log\left(\frac{p_K}{p_L}\right) + (\sigma-1)\log(e_k) + \sigma\log\left(\frac{\delta}{1-\delta}\right)\end{gathered} \tag{20}$$

Af denne ligning ses, at hvis e_k hæves med én pct., falder det optimale K/L-forhold med σ-1 pct. (falder fordi substitutionselasticiteten, σ, typisk er mindre end én). Trenden e_k er altså et udmærket håndtag til at hive i K/L-forholdet, som man godt kan tænkes have en mening om i fremskrivninger.

Trenden på produktiviteten, e_y, er godt nok ikke en rigtig TFP, men derimod en trend for Y/L, som i ADAM-sammenhæng kan fortolkes som et indeks for timeproduktiviteten, som man i fremskrivningsøvelser også sagtens kan have en mening om.

Med de her i papiret foreslåede indeks slipper brugerne af ADAM for at tage stilling til, hvordan man fremskriver en trend for kapitalapparatet, som historisk har en negativ vækstrate, og skal nu i stedet tage stilling til en timeproduktivitet samt en trend til styring af K/L-forholdet.