Danmarks Statistik
MODELGRUPPEN

Arbejdspapir*

Dorte Grinderslev

20. november 2002

Husholdningernes efterspørgsel efter elapparater og el i EMMA

Resumé:

I dette papir arbejdes videre med bestemmelsen i EMMA af husholdningernes el-efterspørgsel.

Papiret opstiller en model, hvor husholdningerne først vælger mellem 'elydelse' og øvrigt forbrug underlagt en budgetrestiktion, hvorefter de vælger, hvorledes 'elydelsen' skal 'produceres' ved hjælp af elapparater (kapitalapparat) og elforbrug.

Konkret anvendes en nestet CES-funktion, og der er et udførligt bilag med alle de relevante udregninger.

Modellen estimeres, og der udføres multiplikatoreksperimenter i en isoleret delmodel. I den samlede delmodel er elapparater og elforbrug komplementære, mens de er substitutter givet elydelsen.

Idéen i modelskitsen virker som en farbar vej frem til en ny ligning i EMMA for husholdningernes elforbrug, men der bør arbejdes mere med konstruktionen af data for et 'kapitalapparat'. Desuden er forfatteren er ikke helt tilfreds med estimations-resultaterne, men ved at binde en parameter eller to skulle der være håb...

DGR20N02.WPD

Nøgleord: EMMA, Forbrug og opsparing

1. Indledning

I dette papir arbejdes videre med modelleringen i EMMA af husholdningernes el-efterspørgsel. I papiret DGR20O02 konstrueres data for en bestand af elapparater, og det blev forsøgt at estimere en relation for køb af elapparater ud fra en Stone-Rowe-transformation. Derefter blev det forsøgt i papiret DGR11N02 at estimere husholdningernes el-efterspørgsel betinget på den imputerede apparatbestand.

Her samles de to tilgangsvinkler, og der opstilles et samlet efterspørgselssystem for husholdningernes køb af elapparater og elforbrug.

Vi starter med forskellige overvejelser i afsnit 2, hvorefter der opstilles en model i afsnit 3. Data præsenteres kort i afsnit 4. Modellen estimeres i afsnit 5 og aftestes med multiplikatoreksperimenter i afsnit 6. Endelig konkluderes papiret i afsnit 7.

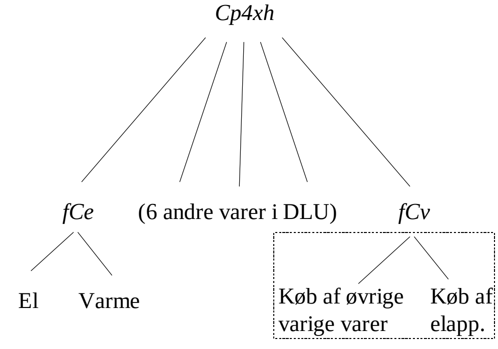
2. Modelovervejelser

I papiret vedrørende køb af elapparater tages udgangspunkt i ADAM's formulering af bilkøb, og idéen i dette papir er hentet i et tidligere forslag til en model for husholdningernes valg mellem biler, benzin og kollektiv transport, jf. MAR30900.

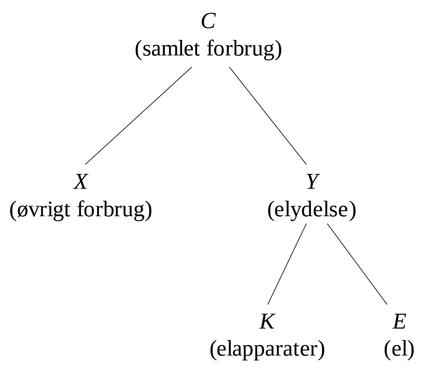
De to forbrugsbeslutninger (elapparater-el og biler-benzin) har en del ligheder: Det er ikke benzinen i sig selv, der giver nytte, men kørsel i bilen, som vi benævner 'transport-ydelse' eller 'transport-tjeneste'. Ligeledes er det ikke kun ejerskab af elapparater eller at elmåleren snurrer rundt, der giver nytte; det er *brugen* af elapparaterne, dvs. 'el-ydelsen' eller 'el-tjenesten'. Derfor er det oplagt at modellere køb af biler og benzin sammen og køb af elapparater og elforbrug sammen.

Vi vil opstille en model, så husholdningerne først vælger mellem 'elydelse' og andet forbrug, hvorefter de vælger, hvorledes elydelsen skal 'produceres' ved hjælp af el og elapparater. Dette er forsøgt illustreret i figur 2, mens figur 1 viser, hvorledes det nuværende system kan tænkes, hvor dog udsplitningen af varige varer (den stiblede kasse) ikke eksisterer.

Figur 1. Forbrugssystem, DLU



Figur 2. Forbrugssystem, nyt



I figuren over det nye forbrugssystem er *X* de seks andre varer i ADAM's forbrugssystem DLU (*fCf*, *fCgbk*, *fCi*, *fCn*, *fCs*, *fCt*) og den del af varige varer, *fCv*, der ikke er elapparater.

Som hidtil bestemmes husholdningernes efterspørgsel efter el og varme i EMMA, og husholdningernes brændselsforbrug, *fCe*, eksogeniseres i ADAM ved en sammenkobling af EMMA og ADAM.

Vi ser her i papiret bort fra at andet end elapparater også bruger el, fx lamper, det må fanges i konstantled og en trend.

I det samlede system forventer (kræver!) vi, at el og elapparater er komplementære varer, således at fx en stigning i elprisen bevirker et fald i både elforbrug (direkte effekt) og i apparatbestanden (indirekte effekt som følge af, at apparaterne nu er dyrere i drift).

Givet elydelsen kan el og apparater i midlertidig sagtens tænkes at være substitutter. Vi tænker, at 'elydelse' kan 'produceres' med forskellige kombinationer af el og elapparater. Et eksempel kunne være, at vi efterspørger mere ovnbagt mad (stigning i elydelse), dette kan enten tilfredsstilles ved at bruge den store komfurovn mere (uændret apparatbestand og øget elforbrug) eller ved at købe en mindre bordovn (øget apparatbestand og elforbrug øget - eller uændret/mindsket, hvis en større del af ovnmaden tilberedes i den nye ovn, der er mindre elforbrugende).

I den valgte formulering i dette papir dækker nytten af 'elydelse' over nytten ved brugen af elapparaterne, men også en nytte ved at eje elapparaterne. Dermed er begrebet mere omfattende end det ingeniørmæssige 'eltjeneste'-begreb, der kun er nytten ved brug af apparaterne. Enigheden går på, at elforbruget i sig selv ikke giver nytte; det er den ydelse, elapparaterne producerer ved at bruge el, der giver nytte.

Modellen for køb af elapparater og elforbrug tænkes placeret i EMMA, så når ADAM skal opdateres med resultaterne fra en EMMA-kørsel, skal husholdningernes køb af varige varer, *fCv*, opdateres med ændringen i husholdningernes køb af elapparater, *fCa*, (der er en del af varige varer), og husholdningernes brændselsforbrug, *fCe*, skal fortsat eksogeniseres følgende husholdningernes el- og varmeforbrug i EMMA, *qJexvc* + *qJevc*.

Hvis budgettet til elydelse ikke overholdes (på kort såvel som på lang sigt), vil ADAM's forbrugssystem, DLU, proportionaljustere forskellen ud på de øvrige forbrugskomponenter.

Tilbage i papiret EDM04297 afsnit 5 er følgende kritik af ADAM's håndtering af varige varer i forbrugssystemet DLU, der gentages her for at erindre om, at behandlingen af varige varer i ADAM bør revideres, da det er en ad-hoc løsning at behandle køb af elapparater anderledes.

> Som det er formuleret i DLU, bliver varige varer behandlet på nøjagtig samme måde som ikke-varige varer. Man lader nyttebidraget fra den varige vare komme fra den købte mængde af varen i den pågældende periode, hvor det i stedet bør komme fra denne vares ydelse i de enkelte perioder. Ved varige varer bør man skelne mellem køb og forbrug. En anden ting, man bør tage hensyn til, er, at forbrugsbeslutningen for varige varer ikke er tidsseparabel. Man er derfor nødt til at formulere forbrugsbeslutningen i en intertemporal ramme. I papiret vises, at man kan udvide et sædvanligt efterspørgselssystem, udledt fra maksimering af en nyttefunktion under en lineær budgetbetingelse, til også at omfatte varige varer. Problemet reducerer til det sædvanlige; maksimering af en nyttefunktion under en lineær budgetbetingelse, men hvor 'mængden' af den varige vare, skal måles i ydelsesenheder, og prisen er usercost, dvs. prisen på at holde en ydelsesenhed af den varige vare i en periode. Som EDM afsluttende kommenterer, er dette nok den mest simple måde at formulere forbrug af varige varer i et sædvanligt efterspørgselssystem, lige bortset fra at ignorere, at der er tale om en varig vare, som man gør i dag.

3. Opstilling af model

Først opstilles en nyttefunktion, hvor nytten af elydelse og øvrigt forbrug maksimeres givet en budgetrestriktion og en 'produktionsfunktion', der bestemmer elydelsen som funktion af bestanden af elapparater og elforbrug (afsnit 3.1). Dernæst opskrives nyttemaksimeringsproblemet intertemporalt, således at det er køb i stedet for bestand af elapparater, der er modelleres (afsnit 3.2), hvorefter der udledes efterspørgselsligninger (afsnit 3.3).

Vi ser nærmere på, om el og elapparater er substitutter eller komplementære i afsnit 3.4. Systemet af efterspørgselsligninger tilføjes effektivitetsindeks (afsnit 3.5), hvorefter de langsigtede elasticiteter i systemet beregnes i afsnit 3.6. Den (simple) dynamik beskrives i afsnit 3.7.

De bagvedliggende udregninger er samlet i bilag A.

Endelig argumenteres for forenklinger af systemet til estimationsbrug (afsnit 3.8), og den valgte nomenklatur opsummeres (afsnit 3.9).

3.1. Nyttefunktion

Vi opstiller en nestet nyttefunktion for husholdningerne, hvor der først vælges mellem elydelse, Y, og øvrigt forbrug, X, hvorefter elydelsen sammensættes af apparater, K, og elforbrug, E. Budgetrestriktionen er givet ved den samlede udgift til forbrug, C. Priserne på henholdsvis E, K og X er P_E, P_K og P_X.

$$\begin{aligned} &\text{Max}_{E,K,X}\ U = u\left(Y, X\right) = u\left(y\left(E,K\right), X\right) \\ &s.t. \qquad C = P_E E + P_K K + P_X X \end{aligned} \tag{1}$$

De to funktioner (u og y) skal specificeres til estimationsbrug, og her vælges, at de begge er CES-funktioner (formuleret med hver kun én skaleringsparameter, δ_1 og δ_2, da niveauet af både elydelse og nytte er ukendt). Parameteren $\sigma_1 > 0$ er substitutionselasticiteten mellem el og apparater givet ydelsen, og $\sigma_2 > 0$ er substitutionselasticiteten mellem elydelse og øvrigt forbrug.

$$Y = y(E, K) = \left[d_1 E^{\frac{s_1 - 1}{s_1}} + (1 - d_1) K^{\frac{s_1 - 1}{s_1}} \right]^{\frac{s_1}{s_1 - 1}} \tag{2}$$

$$U = u(Y, X) = \left[d_2 Y^{\frac{s_2 - 1}{s_2}} + (1 - d_2) X^{\frac{s_2 - 1}{s_2}} \right]^{\frac{s_2}{s_2 - 1}} \tag{3}$$

3.2. Intertemporal nyttefunktion

Det er apparatbestanden K, der indgår i 'produktionsfunktionen' $y(.)$ for elydelse, men forbrugeren vælger ikke bestanden, men køb af elapparater i hver periode.

Derfor opskrives det intertemporale nyttemaksimeringsproblem (4), hvor den 'øjeblikkelige' nytte er $U_t = U$ ovenfor. Udgiften til køb af elapparater er $P_I I$, hvor I er købet, og P_I er prisen på elapparater. Bibetingelse (a) er den intertemporale budgetbetingelse (med uendelig levetid - af husholdningerne ikke af elapparaterne), hvor penge overføres mellem perioderne til renten i. Bibetingelse (b) er kapital-akkumulationsligningen, hvor d er afgangsraten. Der kan indføres en diskontering mellem forbrug i forskellige perioder, men det er uden betydning for efterspørgsels-ligningerne og er derfor udeladt her.

$$\begin{aligned} &\mathrm{Max}_{\{E_t, I_t, X_t\}_{t=0}^{\infty}} \sum_{t=0}^{\infty} U_t \\ &s.t. \quad (a) \quad 0 = \sum_{t=0}^{\infty} \left(P_{E_t} E_t + P_{I_t} I_t + P_{X_t} X_t - C_t \right) \frac{1}{(1+i)^t} \\ &\qquad\;\; (b) \quad I_t = K_t - (1-d) K_{t-1} \end{aligned} \tag{4}$$

3.3. Efterspørgselsligninger

Vi finder efterspørgselsligningerne ved Lagrange-optimering.

Udtrykket for usercost er (5), hvor $\dot{P}_{I_{t+1}}$ er ændringen til tid t+1 i prisen på køb af elapparater.

$$P_{K_t} = (1+i)^{-1} P_{I_t} \left[i + d - (1-d) \dot{P}_{I_{t+1}} \right] \tag{5}$$

Efterspørgslen efter elydelse er en almindelig CES-efterspørgselsligning (6).

$$\log\left(Y^*\right) = \log\left(\frac{C}{P_C}\right) + s_2 \log\left(d_2\right) - s_2 \log\left(\frac{P_Y}{P_C}\right) \tag{6}$$

Hvor P_C er et nestet CES-prisindeks, der vægter priserne på X (øvrigt forbrug), E (el) og K (elapparater). P_Y er et CES-prisindeks på elydelse, der vægter elprisen og usercost på elapparater.

$$P_C = \left[d_2^{s_2} P_Y^{1-s_2} + (1-d_2)^{s_2} P_X^{1-s_2} \right]^{\frac{1}{1-s_2}} \tag{7}$$

$$P_Y = \left[d_1^{s_1} P_E^{1-s_1} + (1-d_1)^{s_1} P_K^{1-s_1} \right]^{\frac{1}{1-s_1}} \tag{8}$$

Efterspørgselsligningerne for el og apparatbestand er ligeledes almindelige CES-efterspørgselsligninger.

$$\log\left(E^*\right) = \log\left(Y^*\right) + s_1 \log\left(d_1\right) - s_1 \log\left(\frac{P_E}{P_Y}\right) \tag{9}$$

$$\log\left(K^*\right) = \log\left(Y^*\right) + s_1 \log\left(1-d_1\right) - s_1 \log\left(\frac{P_K}{P_Y}\right) \tag{10}$$

Da vi egentlig ikke er interesseret i at estimere efterspørgslen efter elydelse - og heller ikke har data for ydelsen, vælger vi at indsubstitutiere efterspørgselsligningen for Y^* i efterspørgselsligningerne for E^* og K^*.

$$\log\left(E^*\right) = \log\left(\frac{C}{P_C}\right) + s_1 \log\left(d_1\right) + s_2 \log\left(d_2\right) - s_1 \log\left(\frac{P_E}{P_Y}\right) - s_2 \log\left(\frac{P_Y}{P_C}\right) \tag{11}$$

$$\log\left(K^*\right) = \log\left(\frac{C}{P_C}\right) + s_1 \log\left(1-d_1\right) + s_2 \log\left(d_2\right) - s_1 \log\left(\frac{P_K}{P_Y}\right) - s_2 \log\left(\frac{P_Y}{P_C}\right) \tag{12}$$

Da det kan have interesse i modellen, kan der bagefter dannes en variabel for elydelsen som det korrekte CES-aggregat af el og elapparater givet ved (2). Hvilket selvfølgelig giver det samme som Y^* beregnet ud fra efterspørgselsligningen (6).

Som i et almindeligt CES-system ser vi, at forholdet mellem de to faktorer (E og K) er bestemt ud fra deres prisforhold, (det ses ved at trække efterspørgselsligningerne (9) og (10) fra hinanden).

$$\log\left(\frac{E^*}{K^*}\right) = s_1 \log\left(\frac{d_1}{1-d_1}\right) - s_1 \log\left(\frac{P_E}{P_K}\right) \tag{13}$$

3.4. Substitutter eller komplementære?

Som systemet er opstillet, er el og elapparater substitutter i det inderste nest, dvs. givet elydelsen, men vi forventer, at el og elapparater er komplementære goder i det samlede forbrugssystem, dvs. hvis fx elprisen stiger, medfører det et fald i såvel elforbrug som apparatbestand.

Ligeledes skal højere pris på elapparater alt i alt mindske elforbruget, selvom højere apparatpris, og dermed lavere P_E/P_K, betyder, at hvert apparat bruges mere, så falder apparatbestanden så meget, at også det samlede elforbrug falder. - Man bruger så at sige de 10% færre apparater 5% mere ved en stigning i apparatprisen.

For at E og K er komplementære, skal gælde at $\sigma_1 < \sigma_2$, dvs. at substitutionen mellem elydelse og øvrigt forbrug er større end substitutionen mellem el og elapparater.

3.5. Effektivitetsindeks (trende)

Vi tilføjer nu efterspørgselsligningerne lidt krydderi i form af effektivitetsindeks. Som udgangspunkt formulerer vi tre effektivitetsindeks på henholdsvis elydelse, d_Y, elapparater, d_K, og el, d_E. Det skal understreges, at kun effektivitetsindeksene på E og K kan estimeres frit. Ved at anvende nedenstående restriktion mellem effektivitetsindeksene kan vi i modellen beregne effektivitetsindekset for Y, hvor S_E er omkostningsandelen for el, og (1 ! S_E) er omkostningsandelen for elapparater.

$$\log(d_Y) = S_E \log(d_E) + (1 - S_E)\log(d_K) \tag{14}$$

Når vi indfører effektivitetsindeks, bliver efterspørgselsligningerne for E og K med efterspørgselsligningen for Y indsat:

$$\log\left(E^*\right) = \log\left(\frac{C}{P_C}\right) + s_2 \log\left(d_2\right) - s_2 \log\left(\frac{\tilde{P}_Y}{P_C}\right) + s_1 \log\left(d_1\right) - s_1 \log\left(\frac{P_E}{\tilde{P}_Y}\right) \qquad (15)$$
$$- \left(1 - s_1\right) \log\left(d_E\right)$$

$$\log\left(K^*\right) = \log\left(\frac{C}{P_C}\right) + s_2 \log\left(d_2\right) - s_2 \log\left(\frac{\tilde{P}_Y}{P_C}\right) + s_1 \log\left(1 - d_1\right) - s_1 \log\left(\frac{P_K}{\tilde{P}_Y}\right) \qquad (16)$$
$$- \left(1 - s_1\right) \log\left(d_K\right)$$

Hvor den effektivitetskorrigerede pris på elydelse er

$$\tilde{P}_Y = \left(d_1^{s_1} \left(\frac{P_E}{d_E}\right)^{1-s_1} + \left(1 - d_1\right)^{s_1} \left(\frac{P_K}{d_K}\right)^{1-s_1} \right)^{\frac{1}{1-s_1}} \qquad (17)$$

I modellen beregner vi elydelsen som CES-aggregatet på lang sigt af K^* og E^* og på kort sigt af *K* og *E*.

$$Y^* = y\left(E^*, K^*\right) = \left[d_1 \left(E^*\right)^{\frac{s_1-1}{s_1}} + \left(1 - d_1\right)\left(K^*\right)^{\frac{s_1-1}{s_1}} \right]^{\frac{s_1}{s_1-1}} \qquad (18)$$

$$Y = y\left(E, K\right) = \left[d_1 \left(E\right)^{\frac{s_1-1}{s_1}} + \left(1 - d_1\right)\left(K\right)^{\frac{s_1-1}{s_1}} \right]^{\frac{s_1}{s_1-1}} \qquad (19)$$

Den effektivitetskorrigerede elydelse kan enten beregnes som CES-aggregatet af *E* og *K* effektivitetskorrigeret (20), eller ved at gange ovenstående udtryk for *Y* med det beregnede effektivitetsindeks for *Y*, d_Y (14). (Det sidste er dog en approksimation, da d_Y er en approksimation til det 'sande' effektivitetsindeks på *Y*).

$$\tilde{Y} = y\left(\tilde{E}, \tilde{K}\right) = \left[d_1 \left(E \cdot d_E\right)^{\frac{s_1-1}{s_1}} + \left(1 - d_1\right)\left(K \cdot d_E\right)^{\frac{s_1-1}{s_1}} \right]^{\frac{s_1}{s_1-1}} \approx Y \cdot d_Y \qquad (20)$$

Endelig har vi brug for i modellen at beregne køb af elapparater, *I*, som følger af kapitalakkumulationsligningen.

$$I = \Delta K + d \cdot K_{-1} \tag{21}$$

3.6. Priselasticiteter

Vi har beregnet E og K's langsigtede elasticitet, ξ, mht. de to priser (P_E og P_K) og mht. de to effektivitetsindeks (d_E og d_K) både for fastholdt niveau af elydelsen (svarer til et almindeligt CES-system med to varer) og i det samlede system (betegnes totale elasticiteter). Elasticiteterne afhænger af de to estimerede substitutionselasticiteter og af den optimale omkostningsandel for E. Fortegnene er angivet under antagelse af, at substitutionselasticiteterne er mellem 0 og 1, og at $\sigma_1 < \sigma_2$ (E og K er komplementære i det samlede system).

Tabel 1. Priselasticiteter

	P_E	P_K
E givet Y	$-s_1\left(1-S_E^*\right)<0$	$s_1\left(1-S_E^*\right)>0$
K givet Y ...	$s_1 S_E^* > 0$	$-s_1 S_E^* < 0$
E	$-s_1+\left(s_1-s_2\right)S_E^*<0$	$\left(s_1-s_2\right)\left(1-S_E^*\right)<0$
K	$\left(s_1-s_2\right)S_E^*<0$	$-s_1+\left(s_1-s_2\right)\left(1-S_E^*\right)<0$

Tabel 2. Effektivitetselasticiteter og sammenhæng til priselasticiteterne

	d_E	d_K
E givet *Y*	$-(1-s_1)-s_1S_E^*$ $=-\left(1+x^*_{E,P_E\vert Y}\right)<0$	$-s_1\left(1-S_E^*\right)$ $=-x^*_{E,P_K\vert Y}<0$
K givet *Y* ...	$-s_1S_E^*$ $=-x^*_{K,P_E\vert Y}<0$	$-(1-s_1)-s_1\left(1-S_E^*\right)$ $=-\left(1+x^*_{K,P_K\vert Y}\right)<0$
E	$-(1-s_1)-(s_1-s_2)S_E^*$ $=-\left(1+x^*_{E,P_E}\right)<0$	$-(s_1-s_2)\left(1-S_E^*\right)$ $=-x^*_{E,P_K}>0$
K	$-(s_1-s_2)S_E^*$ $=-x^*_{K,P_E}>0$	$-(1-s_1)-(s_1-s_2)\left(1-S_E^*\right)$ $=-\left(1+x^*_{K,P_K}\right)<0$

3.7. Dynamisk tilpasning

Vi formulerer den dynamiske tilpasning til de langsigtede (ønskede) niveauer af elforbrug og elapparatbestand som to simple fejlkorrektionsligninger, hvor a_2 og b_2 er tilpasningshastigheden for henholdsvis el og elapparater; a_2, b_2 0]0,1]. Vi forsøger ikke (på nuværende tidspunkt) at estimere forskellige kortsigtseffekter af de forskellige forklarende variabler i hver af ligningerne, så kortsigtseffekterne er henholdsvis a_1 og b_1.

$$\text{Dlog}(E)=a_1\,\text{Dlog}\left(E^*\right)-a_2\left[\log(E_{-1})-\log\left(E^*_{-1}\right)\right]+e_E \tag{22}$$

$$\text{Dlog}(K)=b_1\,\text{Dlog}\left(K^*\right)-b_2\left[\log(K_{-1})-\log\left(K^*_{-1}\right)\right]+e_K \tag{23}$$

Til estimationen antager vi, at $(e_E,e_K)_t\sim iid\;\;N_2(0,\Sigma)$.

Det er forventeligt, at elforbruget kan ‘overshoote’ på kort sigt, dvs. $a_1 > 1$, mens bestanden af elapparater er træg, dvs. $0 < b_1 < 1$. Vi vil også på forhånd forvente, at tilpasningen i elforbruget er hurtigere end for apparatbestanden, dvs. $a_2 > b_2$ (og $a_1 > b_1$), da det er nemmere at tænde på stikkontakten end at bevæge sig ned til isenkræmmeren for at købe en ny brødrister.

En mere avanceret form for dynamik kunne være at antage, at fx en stigning i den ønskede elydelse altid blev tilfredstillet ved øget elforbrug (større end det ønskede) for at kompensere for den træge udvikling i bestanden af elapparater. Dette kaldes i faktorefterspørgselssammenhæng for tredje-generationsdynamik.

3.8. Forenklinger til estimationsbrug

Til estimationsbrug vælger vi (til at starte med) et mere simpelt udtryk for usercost, $P_K = P_I \cdot d$, således at rente og prisforventning ignoreres. Der tænkes næppe meget i gensalgsværdien, hvorved vi kan ignorere prisforventningen, og elapparater lånefinansieres i beskeden grad, hvorfor renten kan ignoreres.

Et andet argument for at udelade renten er at kræve, at budgetrestriktionen er opfyldt hver periode, hvorved renten forsvinder ud af systemet. Dvs. bibetingelse (a) er i stedet (24).

$$0 = P_{E_t} E_t + P_{I_t} I_t + P_{X_t} X_t - C_t \quad , t = 0, \ldots, \infty \tag{24}$$

I stedet for at anvende et nestet CES-prisindeks som P_C, anvender vi til estimationsbrug den generelle forbrugsdeflator, *pcp4xhv*, der så er en eksogen variabel i estimationen i modsætning til CES-prisindekset, der afhænger af parametrene. Da omkostningsandelen for Y er beskeden, er P_C næsten udelukkende bestemt ud fra prisen på øvrigt forbrug, hvorfor det er en rimelig antagelse at lade P_C være eksogen i estimationen.

3.9. Nomenklatur

I papiret DGR20O02 gives et forslag til nomenklatur for de nye variabler for køb og bestand af elapparater, og dette afsnit opsummerer de anvendte variabelnavne i dette papir for henholdsvis elapparater, elforbrug, privat forbrug og elydelse.

fCa, I	Køb af elapparater (mio. kr., 95), del af *fCv* (varige varer)
pca, P_I	Prisen på elapparater (1995=1)
bfivca, d	Afgangsrate, vi prøver med d = 1/2, 1/3, 1/4, 1/5 og 1/6
Kca, K	Imputeret bestand af elapparater (mio. kr., 95), *Kca2*,..., *Kca6* er beregnet med afgangsrater på hhv. 1/2,...,1/6, (tilsvarende nomenklatur for øvrige variabler, der afhænger af afgangsraten)
Kcaw, K^*	Ønsket beholdning på lang sigt
fIvca	Afgang, $fIvca = bfivca \cdot Kca_{-1}$
uca, P_K	Usercost på elapparater
dtkca, e_K	Effektivitetsindeks for elapparater
qJexvc, E	Husholdningernes elforbrug eksl. elvarme (TJ)
qJexvcw, E^*	Ønsket elforbrug
pqjec, P_E	Husholdningernes elpris (mio. kr./TJ)
dtqjexvc, e_E	Effektivitetsindeks for el

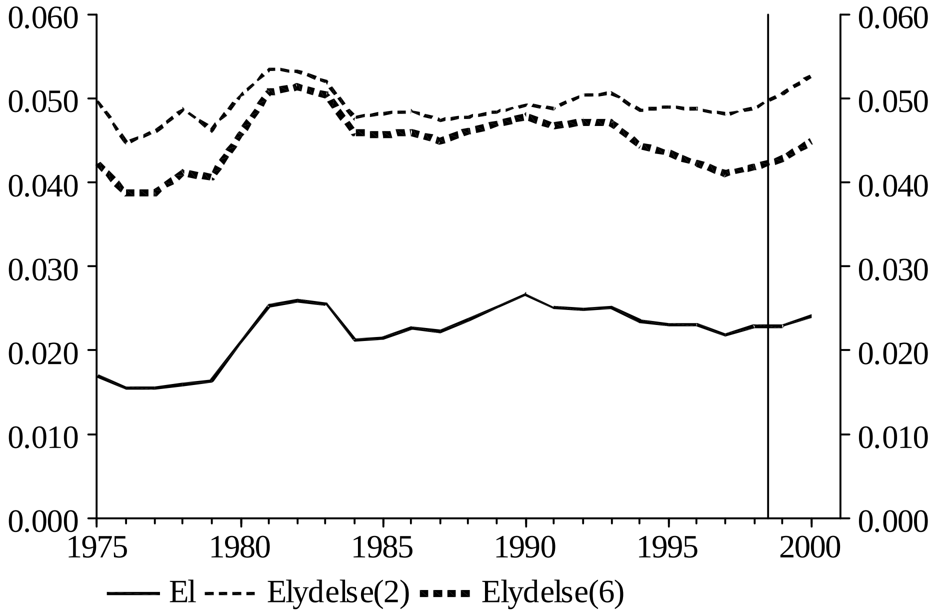
Cp4xh, *C*	Samlet privat forbrug eksl. boliger (mio. kr.), anvendes i DLU
pcp4xhv, P_C	Forbrugsdeflator (1995=1), anvendes i DLU
Y	Elydelse
Y^*	Ønsket elydelse
dty, e_Y	Trend i elydelsen
P_Y	Pris på elydelse

4. Data

Husholdningernes udgift til elydelse (elforbrug og afskrivning på apparatbestanden) udgør ca. 5% af deres samlede budget til forbrug. Figur 3 viser omkostningsandelen for el (*pqjec@qJexvc*/*Cp4xh*) og omkostningsandelen for elydelse beregnet med to forskellige afskrivningsrater, henholdsvis 1/2 og 1/6;
dvs. (*pca @ fIvca<2,...,6> + pqjec @ qJexvc*) / *Cp4xh*.

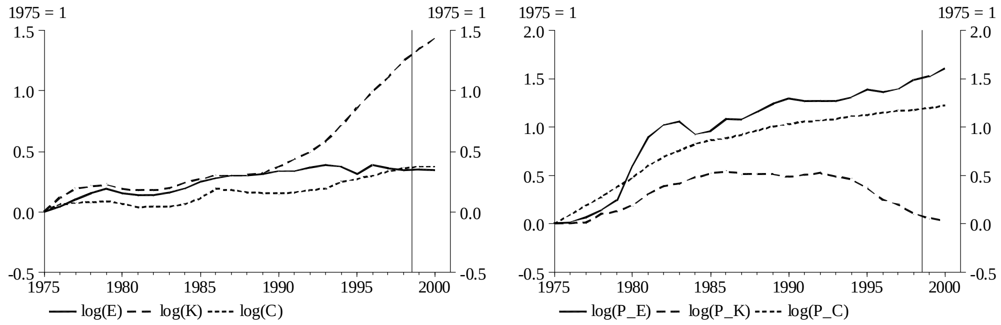
Det ses, at udgifterne til el og elapparater er omtrent lige store og udgør en beskeden del af det private forbrug.

Figur 3. Omkostningsandele



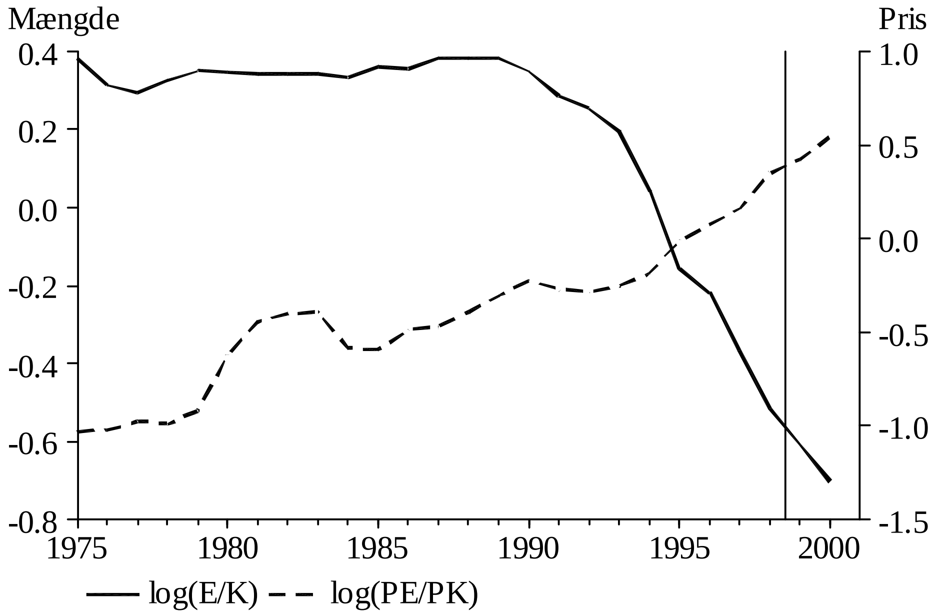
I nedenstående figurer er tegnet den historiske udvikling i elforbrug (E), *qJexvc*, apparatbestand K (med en afskrivningsrate på 1/3), *Kca3*, og samlet privat forbrug (C), *Cp4xh*/*pcp4xhv*, og udviklingen i de tilhørende priser, *pqjec* (P_E), *uca* (P_K) og *pcp4xhv* (P_C).

Figur 4. Historisk udvikling i mængder og priser



I det inderste nest i nyttefunktionen bestemmes forholdet mellem el og elapparater givet ved prisforholdet jf. (13), disse to forhold er vist i figur 5. Det ses, at prisforholdet har været stigende i perioden, mens mængdeforholdet - specielt i slutningen af perioden - har været faldende. Dette kan indikere prisafhængig substitution mellem el og elapparater.

Figur 5. Forholdet mellem el og elapparater



Det er ikke muligt på tilsvarende vis at illustrere data til det yderste nest, hvor forholdet mellem elydelse, (som vi ikke har data for), og øvrigt forbrug afhænger af prisforholdet mellem elydelse, P_Y, (som vi heller ikke har data for), og prisen på øvrigt forbrug.

5. Estimationer

Nedenstående ligningssystem for apparatbestand og elforbrug er estimeret med de fem forskellige apparatbestande (baseret på afgangsrater på 1/2,...,1/6).

$$\log\left(E^*\right)=\log\left(\frac{C}{P_C}\right)-s_2\log\left(\frac{\tilde{P}_Y}{P_C}\right)-s_1\log\left(\frac{P_E}{\tilde{P}_Y}\right) \\ +s_1\log\left(d_1\right)+s_2\log\left(d_2\right)-\left(1-s_1\right)\log\left(d_E\right) \tag{25}$$

$$\log\left(K^*\right)=\log\left(\frac{C}{P_C}\right)-s_2\log\left(\frac{\tilde{P}_Y}{P_C}\right)-s_1\log\left(\frac{P_K}{\tilde{P}_Y}\right) \\ +s_1\log\left(1-d_1\right)+s_2\log\left(d_2\right)-\left(1-s_1\right)\log\left(d_K\right) \tag{26}$$

$$\tilde{P}_Y=\left(d_1^{s_1}\left(\frac{P_E}{d_E}\right)^{1-s_1}+\left(1-d_1\right)^{s_1}\left(\frac{P_K}{d_K}\right)^{1-s_1}\right)^{\frac{1}{1-s_1}} \tag{27}$$

$$\mathrm{Dlog}\left(E\right)=a_1\,\mathrm{Dlog}\left(E^*\right)-a_2\left[\log\left(E_{-1}\right)-\log\left(E_{-1}^*\right)\right]+e_E \tag{28}$$

$$\mathrm{Dlog}\left(K\right)=b_1\,\mathrm{Dlog}\left(K^*\right)-b_2\left[\log\left(K_{-1}\right)-\log\left(K_{-1}^*\right)\right]+e_K \tag{29}$$

Der er estimeret med en kvadratisk trend på både *K* og *E*.

$$\log\left(d_i\right)=w_{1i}t+w_{2i}t^2\ ,\quad i=E,K \tag{30}$$

I nedenstående tabel 1 er opsummeret estimationsresultaterne for simultan estimation af ovenstående ligninger. Der er der ikke samme afhængige variabel i de fem estimationer (*K* er hhv. *Kca2,...,Kca6*), hvilket betyder, at likelihood-værdien i estimationerne ikke kan anvendes til at afgøre, hvilken apparatbestand der passer bedst i estimationen.

Tabel 3. Simultan estimation af apparatbestand og elforbrug

Rate	σ_1	σ_2	a_1	a_2	b_1	b_2	s^2_E	s^2_K	log‹
d = 1/2 ..	0,266	0,467	0,482	0,263	1,027	0,307	0,020725	0,022752	110,922
	[1,78]	[2,99]	[3,48]	[2,25]	[5,168]	[3,10]			
d = 1/3 ..	0,448	0,527	0,399	0,227	1,120	0,396	0,020377	0,018987	115,507
	[3,94]	[3,76]	[4,05]	[2,34]	[8,73]	[4,67]			
d = 1/4 ..	0,605	0,651	0,334	0,173	1,061	0,360	0,020386	0,018489	116,171
	[4,94]	[4,26]	[4,07]	[2,17]	[8,89]	[3,53]			
d = 1/5 ..	0,709	0,746	0,298	0,148	0,989	0,304	0,020451	0,018198	116,487
	[5,15]	[4,38]	[3,98]	[2,09]	[8,15]	[2,58]			
d = 1/6 ..	0,802	0,850	0,268	0,131	0,901	0,226	0,020536	0,017891	116,795
	[4,92]	[4,27]	[3,84]	[2,05]	[6,65]	[1,66]			

Anm.: Estimationsperioden er 1976-1998, T-værdi er angivet i klamme klammer
s^2_E og s^2_K er 'Standard error of regression' for henholdsvis E- og K-ligningen.

I papiret DGR11N02, hvor el-efterspørgslen blev estimeret betinget på apparatbestanden, var der synlig forskel på parameterestimater og forklaringsevne alt efter, hvilken afskrivningsrate der ligger til grund for den imputerede apparatbestand. Der er ligeledes markante forskelle i ovenstående estimationer.

Substititionselasticiteterne øges, når afskrivningsraten mindskes, men forskellen mellem σ_1 og σ_2 er omkring 0.05, pånær når afskrivningsraten kun er 1/2. I alle estimationerne er $\sigma_1 < \sigma_2$, hvorved det er sikret, at el og elapparater er komplementære i det samlede system.

Tilpasningsparametrene for både E og K mindskes, når afskrivningsraten mindskes. Der er voldsom hurtig tilpasning i K-ligningen (endda kortsigtseffekt over 1 i flere af estimationerne), mens E er temmelig træg. Dette er (desværre) i modsætning til, at vi havde forventet, at K var træg og eventuel overshooting i E.

Den bedste forklaringsgrad (mindste s^2) for elligningen opnås, når estimationen baseres på en apparatbestand beregnet med en afgangsrate på 1/3, mens den bedste forklaringsgrad for apparatkøbsligningen opnås med en afgangsrate på 1/6 (modsatte konklusion i DGR20O02).

I bilag B er anbragt figurer med ligningernes historiske forklaringsevne og vækstraten i de estimerede effektivitetsindeks. Generelt er residualerne små, men af mindre positive ting kan nævnes, at i el-ligningen bliver de procentvise residualer større over tid, og der er tegn på systematik (positiv autokorrelation) i residualerne i K-ligningerne.

Den beregnede elydelse, Y, er stigende over tid i 90'erne som følge af den eksplosive stigning i bestanden af elapparater. Det er den effektivitetskorrigerede pris på elydelse, der er indtegnet, og den topper omkring 1990.

Vækstraten i de estimerede effektivitetsindeks er meget forskellig i estimationerne baseret på de forskellige apparatbestande. Meget tyder således på, at effektivitets-indeksene korrigerer for forskelle i beregningen af elapparatbestanden. Der estimeres ganske voldsomme vækstrater, specielt i *E*-ligningen når der er en lav afgangsrate på *K*. Kvadratiske trende er næppe det bedste valg til at beskrive effektivitetsindeksene, det bør istedet overvejes at anvende tidspolynomier med endepunktsrestriktioner som i ADAM's ligninger for arbejdskraft og maskinkapital.

6. Modeleksperimenter

Til dette afsnit er aftestet en isoleret delmodel baseret på estimationen med en afskrivningsrate på 1/3, (udvalgt efter den bedste forklaringsgrad for el, selvom den dynamiske tilpasning for *K* ikke er 'attraktiv' i denne estimation). De anvendte modelligninger og parameterestimater er placeret i bilag D.

Der er udført nedenstående 8 multiplikatoreksperimenter:

1. Budgettet er hævet med 1% (*Cp4xh* @ 1.01)
2. Forbrugerpris hævet med 1%, forbrug i faste priser er uændret (*pcp4xhv* @ 1.01 og *Cp4xh* @ 1.01)
3. Elprisen er hævet med 1% (*pqjec* @ 1.01)
4. Prisen på køb af elapparater er hævet med 1% (*pca* @ 1.01)
5. Elpris og elapparatpris er hævet med 1% (ex. 2+3)
6. Afgangsraten er hævet med 0.01, svarer til ca. 4% stigning (*d* + 0.01)
7. Apparateffektiviteten er hævet med 1% (*dtk* @ 1.01)
8. Eleffektiviteten er hævet med 1% (*dte* @ 1.01)

I bilag C er for hvert eksperiment vist fire figurer med de resulterende multiplikatorer, og der er knyttet kommentarer til resultaterne.

1. Elforbrug på lang og kort sigt, E^* (25) og *E* (28)
2. Elapparatbestand på lang og kort sigt, K^* (26) og *K* (29)
3. Køb af elapparater, *I* (21)
4. Elydelse på lang og kort sigt, Y^* (18) og *Y* (19), effektivitetskorrigeret pris på elydelse, $\tilde{P}_Y$ (17), og udgift til elydelse, $E@P_E + K@P_K$

Vi fokuserer først på langsigtsegenskaberne, hvorefter dynamikken beskrives. Når vi skal se på resultaterne af multiplikatoreksperimenterne, er den nemmeste måde at opdele i to tilfælde; eksperimenter af overordnet karakter (eksperiment 1, 2 og 5), og eksperimenter der rykker forholdet mellem *E* og *K* (eksperiment 3, 4, 6, 7 og 8).

I det første tilfælde kommer effekten på efterspørgslen efter el, *E*, og elapparater, *K*, udelukkende gennem en ændret efterspørgsel efter elydelse, *Y*. For at forstå de langsigtede effekter ses først på efterspørgselsligningen for Y^* (31), hvor der er en 'indkomsteffekt' fra samlet forbrug (*C*) og en substitutionseffekt til øvrigt forbrug (*X*) bestemt af substitutionselasticiteten σ_2. Derefter ses på efterspørgselsligningerne for E^* (32) og K^*, hvor ændringen i Y^* indsættes. Effekt på E^* og K^*, der kommer fra en ændring i Y^*, kan vi tænke på som 'indkomsteffekt'.

$$\begin{aligned} &\log\left(Y^*\right) = \log\left(\frac{C}{P_C}\right) + s_2 \log\left(d_2\right) - s_2 \log\left(\frac{P_Y}{P_C}\right) - \left(1 - s_2\right)\log\left(d_Y\right) \\ \Leftrightarrow \quad &\log\left(Y^* \cdot d_Y\right) = \log\left(\frac{C}{P_C}\right) + s_2 \log\left(d_2\right) - s_2 \log\left(\frac{\tilde{P}_Y}{P_C}\right) \end{aligned} \tag{31}$$

$$\log\left(E^*\right) = \log\left(Y^* \cdot d_Y\right) + s_1 \log\left(d_1\right) - s_1 \log\left(\frac{P_E}{\tilde{P}_Y}\right) - \left(1 - s_1\right)\log\left(d_E\right) \tag{32}$$

I det andet tilfælde er der en direkte effekt på E og K, som i et sædvanligt CES-system med to faktorer, og det er mest intuitivt at tænke i efterspørgselsligningen (33), der bestemmer forholdet mellem E^* og K^*. Effekterne på E^* og K^* for fastholdt Y er de analytisk beregnede elasticiteter af priser og effektiviteter givet Y i tabel 1 og 2.

$$\log\left(\frac{E^*}{K^*}\right) = s_1 \log\left(\frac{d_1}{1 - d_1}\right) - s_1 \log\left(\frac{P_E}{P_K}\right) - \left(1 - s_1\right)\log\left(\frac{d_E}{d_K}\right) \tag{33}$$

Hvis eksperimenterne ændrer prisen eller effektivitetsindekset på elydelsen, (hvilket alle de eksperimenter, vi her ser på, gør), vil det ændre efterspørgslen efter elydelse, jf. (31). Den ændrede efterspørgsel efter Y giver dermed en indirekte effekt på efterspørgslen efter E og K, jf. (32), hvilket vi betegner som 'indkomst-effekten' omtalt ovenfor.

Ved betragtning af pris- og effektivitetseksperimenterne vil det være nyttigt at bladre tilbage til tabel 1 og 2, der opsummerer de analytisk beregnede elasticiteter af stigning i priser og effektiviteter.

Prisen på elydelse, P_Y, (der er effektivitetskorrigeret i modelligningen), kan approksimeres med (34), (dvs. (120) tilsat effektivitetsindeks), hvorved det er nemt at se, hvorledes ændringer i pris og effektivitet af el og elapparater påvirker den effektivitetskorrigerede pris på elydelse.

$$\log\left(\tilde{P}_Y\right) \approx S_E \log\left(\frac{P_E}{d_E}\right) + \left(1 - S_E\right)\log\left(\frac{P_K}{d_K}\right) \tag{34}$$

Dynamikken

I modellen bestemmes efterspørgslen efter E^* og K^* med efterspørgselsudtrykket for Y^* indsat, og tilpasningen til E og K sker med uafhængige fejlkorrektions-ligninger. Efterfølgende bestemmes elydelsen (Y^* og Y) som CES-aggregatet af E^* og K^* (og på kort sigt af E og K). Vi kan med fordel tænke i den logaritmiske approksimation af CES-funktionen i (35), hvor S_E er E's omkostningsandel af elydelsen, - og tilsvarende på lang sigt med *'er på E, K og Y.

$$\log(Y) \approx S_E \log(E) + (1 - S_E)\log(K) \tag{35}$$

Da der er fejlkorrektion i E og K, er der en indirekte fejlkorrektion i Y.

Opsummering af multiplikatoreksperimenterne:

Pris- og effektivitetseffekterne på E^* og K^* er som forventet ud fra de analytisk udledte elasticiteter. Vi ser effekten af, at de to substitutionselasticiteter i systemet (σ_1 og σ_2) er estimeret til at være næsten ens. En stigning i elprisen giver et stort fald i elefterspørgslen og et beskedent fald i apparatbestanden på lang sigt. En stigning i eleffektiviteten giver et stort fald i elefterspørgslen og en beskeden stigning i elapparatbestanden.

Angående den dynamiske tilpasning, er der - til forfatterens store fortrydelse - estimeret overshooting i K, og tilpasningen for E er frustrerende langsom.

Da vi bruger en høj afgangsrate (d = 1/3) i modeleksperimenterne, er der en voldsom førsteårseffekt på købet af elapparater, hvis K stiger som følge af multiplikatoreksperimentet - gad vide hvordan det kommer til at se ud i ADAM, når vi opdaterer *fCv* med ændringen i køb af elapparater ved en samkøring af EMMA og ADAM.

Generelt er multiplikatorerne fint fortolkelige, men overshootingen på kort sigt i K og trægheden i E er ikke acceptable til implementering i EMMA.

7. Konklusion

I papiret er opstillet og estimeret en simultan model for husholdningernes køb af elapparater og deres elforbrug. Betinget på elydelsen er elforbrug og elapparater substitutter, mens de i den samlede delmodel er komplementære.

Heller ikke i dette papir kunne estimationerne afsløre, hvad den ‘sande’ afskrivningsrate er for husholdningernes elapparater. Det kunne være interessant at anvende en konjunkturafhængig afskrivningsrate, det blev uden held forsøgt i DGR20O02.

Konstruktionen af data for en bestand af elapparater er et område, der bør ses mere på, specielt kunne det være spændende at inddrage data for bestand (i styk) af forskellige typer af elapparater fx fra ELMODEL-Bolig.

Langsigtsegenskaberne virker rimelige, men der bør ses mere på dynamikken i systemet. Mine indvendinger er, at førsteårseffekten på bestanden er for stor, mens den er alt for lille på elforbruget, og tilpasningen både for apparatbestand og elforbrug er lige lovlig træg.

I stedet for de anvendte kvadratiske tidstrende som effektivitetsindeks bør der efterprøves andre specifikationer, da de estimerede effektvitetsvækstrater er voldsomme i start- og slutår.

Alt i alt kan det konkluderes, at den opstillede teoretiske model virker som en farbar vej frem til en ny ligning i EMMA for husholdningernes elforbrug, men der er stadig empiriske spørgsmål, der skal løses.

Litteratur

- Edith Madsen (1997): *Det nye DLU: Forslag til nye modelligninger i forbrugssystemet*. Modelgruppepapir EDM04297
- Martin Rasmussen (1999): *Mængde- og effektivitetsindeks i nestede produktionsfunktioner*. Modelgruppepapir MAR18499
- Martin Rasmussen & Niels Arne Dam (2000): *En model for valg af biler, benzin og kollektiv transport*. Modelgruppepapir30900
- Dorte Grinderslev & Kenneth Karlsson (2002): *Husholdningernes el- og varmeefterspørgsel i EMMA, skitser*. Modelgruppepapir DGR22702
- Dorte Grinderslev (2002): *Husholdningernes køb og bestand af el-apparater i EMMA*. Modelgruppepapir DGR20O02
- Dorte Grinderslev (2002): *Husholdningernes el-efterspørgsel i EMMA estimeret betinget på apparatbestanden*. Modelgruppepapir DGR11N02

Bilag A. Udregninger

Der er principielt ikke noget nyt eller revolutionerende i dette bilag, men ud- og mellemregninger er medtaget for fuldstændighedens skyld. Erik Bjørsted takkes for at gennemregne adskillige udkast til dette bilag!

A.1. Efterspørgselsligninger for *K*, *E* og *Y*

Først opskrives nyttemaksimeringsproblemet, hvor forbrugeren vælger en kombination af el E, elapparater K og øvrigt forbrug X underlagt en budgetrestriktion.

$$\begin{aligned} &\text{Max}_{E,K,X}\ U = u(Y,X) = u\big(y(E,K),X\big) \\ &s.t. \qquad C = P_Y Y + P_X X = P_E E + P_K K + P_X X \end{aligned} \tag{36}$$

De to funktioner (y og u) er her CES-funktioner, henholdsvis en 'produktionsfunktion' og en 'nyttefunktion'.

$$Y = y(E,K) = \left[d_1 E^{\frac{s_1-1}{s_1}} + (1-d_1) K^{\frac{s_1-1}{s_1}} \right]^{\frac{s_1}{s_1-1}} \tag{37}$$

$$U = u(Y,X) = \left[d_2 Y^{\frac{s_2-1}{s_2}} + (1-d_2) X^{\frac{s_2-1}{s_2}} \right]^{\frac{s_2}{s_2-1}} \tag{38}$$

Problemet opskrives nu intertemporalt, så det kan formuleres i køb af elapparater, I, i stedet for bestand K, og som sidegevinst giver denne formulering et konsistent udtryk for usercost på apparatbestanden, P_K. Prisen på køb af elapparater er P_I (investeringspris).

Med rente i er forbrugerens intertemporale nyttemaksimeringsproblem givet ved (39). Der er to bibetingelser, (a) er den intertemporale budgetrestriktion, og (b) er investeringsidentiteten. Nytten til tid t er $U_t = U$ i (38).

$$\begin{aligned} &\text{Max}_{\{E_t, I_t, X_t\}_{t=0}^{\infty}} \sum_{t=0}^{\infty} U_t \\ &s.t. \quad (a) \quad 0 = \sum_{t=0}^{\infty} \left(P_{E_t} E_t + P_{I_t} I_t + P_{X_t} X_t - C_t \right) \frac{1}{(1+i)^t} \\ &\qquad\ \ (b) \quad I_t = K_t - (1-d) K_{t-1} \end{aligned} \tag{39}$$

Vi løser maksimeringsproblemet med Lagrange-optimering. Den nestede nyttefunktion indsættes, bibetingelse (b) indsættes i stedet for I, og (a) benyttes som bibetingelse i optimeringen. Lagrange-funktionen for problemet er:

$$
\begin{aligned}
&L\left(\{E_t\}_{t=0}^{\infty},\{K_t\}_{t=0}^{\infty},\{X_t\}_{t=0}^{\infty}\right)=\sum_{t=0}^{\infty} u\left(y\left(E_t,K_t\right),X_t\right)\\
&-l\sum_{t=0}^{\infty}(1+i)^{-t}\left[P_{E_t}\cdot E_t+P_{I_t}\cdot\left(K_t-(1-d)K_{t-1}\right)+P_{X_t}\cdot X_t-C_t\right]
\end{aligned}
\tag{40}
$$

Til hvert tidspunkt *t* ($t = 0,\ldots,\infty$) findes de tre første ordens betingelser nu ved at differentiere Lagrange-funktionen efter de tre variabler *E*, *K* og *X*.

FOC (X_t):

$$
\frac{\partial L(.)}{\partial X_t}=\frac{\partial u(.)}{\partial X_t}-l\,(1+i)^{-t}\,P_{X_t}
\tag{41}
$$

FOC (E_t):

$$
\frac{\partial L(.)}{\partial E_t}=\frac{\partial u(.)}{\partial Y_t}\frac{\partial y(.)}{\partial E_t}-l\,(1+i)^{-t}\,P_{E_t}
\tag{42}
$$

FOC (K_t):

$$
\begin{aligned}
\frac{\partial L(.)}{\partial K_t}&=\frac{\partial u(.)}{\partial Y_t}\frac{\partial y(.)}{\partial K_t}-l\left[(1+i)^{-t}P_{I_t}-(1+i)^{-(t+1)}P_{I_{t+1}}(1-d)\right]\\
&=\frac{\partial u(.)}{\partial Y_t}\frac{\partial y(.)}{\partial K_t}-l\,(1+i)^{-t}\left[P_{I_t}-(1+i)^{-1}P_{I_{t+1}}(1-d)\right]
\end{aligned}
\tag{43}
$$

Vi omskriver nu på udtrykket i den firkantede parentes for at få et usercost udtryk, P_K, som 'prisen' på bestanden af elapparater, *K*.

$$
\begin{aligned}
[.]&=(1+i)^{-1}P_{I_t}\left((1+i)-(1-d)\frac{P_{I_{t+1}}}{P_{I_t}}\right)\\
&=(1+i)^{-1}P_{I_t}\left((1+i)-(1-d)\frac{P_{I_{t+1}}-P_{I_t}}{P_{I_t}}-(1-d)\frac{P_{I_t}}{P_{I_t}}\right)\\
&=(1+i)^{-1}P_{I_t}\left(i+d-(1-d)\frac{P_{I_{t+1}}-P_{I_t}}{P_{I_t}}\right)\\
&=(1+i)^{-1}P_{I_t}\left(i+d-(1-d)\dot{P}_{I_{t+1}}\right)\\
&\equiv P_{K_t}
\end{aligned}
\tag{44}
$$

Bemærk, at usercost til tid t indeholder et prisudtryk om ændringen til tid t+1 i prisen på køb af elapparater, $\dot{P}_{I_{t+1}}$, så til modelbrug, skal der i stedet anvendes et forventningsudtryk for denne prisændring, (ligesom det gøres i ADAM's usercost-udtryk).

Førsteordensbetingelsen for K opskrives nu med P_K:

$$\frac{\partial L(.)}{\partial K_t} = \frac{\partial u(.)}{\partial Y_t}\frac{\partial y(.)}{\partial K_t} - l\,(1+i)^{-t}\,P_{K_t} \tag{45}$$

For at komme videre, skal vi differentiere de indgående CES-funktioner. For at lette læsningen udelades tidsindekset.

Først differentieres nyttefunktionen (u) efter de to faktorer, henholdsvis elydelse (Y) og øvrigt forbrug (X).[1]

$$\begin{aligned}\frac{\partial u(.)}{\partial Y} &= \frac{s_2}{s_2-1}\left[d_2 Y^{\frac{s_2-1}{s_2}} + (1-d_2)\,X^{\frac{s_2-1}{s_2}}\right]^{\left(\frac{s_2}{s_2-1}-1\right)} \cdot d_2\frac{s_2-1}{s_2}Y^{\left(\frac{s_2-1}{s_2}-1\right)} \\ &= d_2 Y^{-\frac{1}{s_2}}\left[d_2 Y^{\frac{s_2-1}{s_2}} + (1-d_2)\,X^{\frac{s_2-1}{s_2}}\right]^{\frac{1}{s_2-1}} = d_2 Y^{-\frac{1}{s_2}} U^{\frac{1}{s_2}}\end{aligned} \tag{46}$$

$$\frac{\partial u(.)}{\partial X} = (1-d_2)\,X^{-\frac{1}{s_2}}\left[d_2 Y^{\frac{s_2-1}{s_2}} + (1-d_2)\,X^{\frac{s_2-1}{s_2}}\right]^{\frac{1}{s_2-1}} = (1-d_2)\,X^{-\frac{1}{s_2}} U^{\frac{1}{s_2}} \tag{47}$$

På tilsvarende vis differentieres elydelses-produktionsfunktionen (y) efter henholdsvis el (E) og elapparater (K).

$$\frac{\partial y(.)}{\partial E} = d_1 E^{-\frac{1}{s_1}}\left[d_1 E^{\frac{s_1-1}{s_1}} + (1-d_1)\,K^{\frac{s_1-1}{s_1}}\right]^{\frac{1}{s_1-1}} = d_1 E^{-\frac{1}{s_1}} Y^{\frac{1}{s_1}} \tag{48}$$

$$\frac{\partial y(.)}{\partial K} = (1-d_1)\,K^{-\frac{1}{s_1}}\left[d_1 E^{\frac{s_1-1}{s_1}} + (1-d_1)\,K^{\frac{s_1-1}{s_1}}\right]^{\frac{1}{s_1-1}} = (1-d_1)\,K^{-\frac{1}{s_1}} Y^{\frac{1}{s_1}} \tag{49}$$

Dermed har vi de to manglende differentialled i førsteordensbetingelserne for E og K.

[1]Mellemregninger vedrørende eksponenterne:

$$\frac{s_2}{s_2-1} - 1 = \frac{s_2-(s_2-1)}{s_2} = \frac{1}{s_2-1} \quad \text{og} \quad \frac{s_2-1}{s_2} - 1 = \frac{s_2-1-s_2}{s_2} = -\frac{1}{s_2}$$

$$\frac{\partial u(.)}{\partial E}=\frac{\partial u(.)}{\partial Y}\frac{\partial y(.)}{\partial E}=d_2Y^{-\frac{1}{s2}}U^{\frac{1}{s2}}d_1E^{-\frac{1}{s1}}Y^{\frac{1}{s1}} \tag{50}$$

$$\frac{\partial u(.)}{\partial K}=\frac{\partial u(.)}{\partial Y}\frac{\partial y(.)}{\partial K}=d_2Y^{-\frac{1}{s2}}U^{\frac{1}{s2}}\left(1-d_1\right)K^{-\frac{1}{s1}}Y^{\frac{1}{s1}} \tag{51}$$

Førsteordensbetingelserne sættes nu ‘blot’ lig med nul og løses, men vi gør det trinvist. Først findes de optimale niveauer af E og K for fast niveau af Y (elydelsen). Derefter findes det optimale niveau af Y (og X) for fast U (fastholdt nytteniveau).

Ved at dividere førsteordensbetingelserne for E og K fås

$$\frac{\frac{\partial y(.)}{\partial E}}{\frac{\partial y(.)}{\partial K}}=\frac{P_E}{P_K}\Leftrightarrow\frac{d_1}{1-d_1}\left(\frac{E}{K}\right)^{-\frac{1}{s_1}}=\frac{P_E}{P_K}\Leftrightarrow\frac{E}{K}=\left(\frac{d_1}{1-d_1}\right)^{s_1}\left(\frac{P_E}{P_K}\right)^{-s_1}$$
$$\Leftrightarrow E=K\left(\frac{d_1}{1-d_1}\right)^{s_1}\left(\frac{P_E}{P_K}\right)^{-s_1} \tag{52}$$

Udtrykket for E indsættes i CES-ligningen for Y (37), hvorefter efterspørgsels-ligningen for K findes ved at isolere K.

$$\begin{aligned}
Y&=\left[d_1E^{\frac{s_1-1}{s_1}}+\left(1-d_1\right)K^{\frac{s_1-1}{s_1}}\right]^{\frac{s_1}{s_1-1}}\\
&=\left[d_1\left(K\left(\frac{d_1}{1-d_1}\right)^{s_1}\left(\frac{P_E}{P_K}\right)^{-s_1}\right)^{\frac{s_1-1}{s_1}}+\left(1-d_1\right)K^{\frac{s_1-1}{s_1}}\right]^{\frac{s_1}{s_1-1}}\\
&=\left[d_1K^{\frac{s_1-1}{s_1}}\left(\frac{d_1}{1-d_1}\right)^{s_1-1}\left(\frac{P_E}{P_K}\right)^{-(s_1-1)}+\left(1-d_1\right)K^{\frac{s_1-1}{s_1}}\right]^{\frac{s_1}{s_1-1}}
\end{aligned} \tag{53}$$

$$\Leftrightarrow Y^{\frac{s_1-1}{s_1}} = d_1 K^{\frac{s_1-1}{s_1}} \left(\frac{d_1}{1-d_1}\right)^{s_1-1} \left(\frac{P_E}{P_K}\right)^{-(s_1-1)} + (1-d_1) K^{\frac{s_1-1}{s_1}}$$
$$= K^{\frac{s_1-1}{s_1}} \left[d_1 \left(\frac{d_1}{1-d_1}\right)^{s_1-1} \left(\frac{P_E}{P_K}\right)^{-(s_1-1)} + (1-d_1) \right] \tag{54}$$

$$\Leftrightarrow K = Y \left[d_1 \left(\frac{d_1}{1-d_1}\right)^{s_1-1} \left(\frac{P_E}{P_K}\right)^{-(s_1-1)} + (1-d_1) \right]^{-\frac{s_1}{s_1-1}}$$
$$= Y \left[d_1^{s_1} (1-d_1)^{1-s_1} \left(\frac{P_E}{P_K}\right)^{1-s_1} + (1-d_1) \right]^{\frac{s_1}{1-s_1}} \tag{55}$$
$$= (1-d_1)^{\frac{s_1}{1-s_1}} Y \left[\left(\frac{P_E}{P_K}\right)^{1-s_1} \left(\frac{d_1}{1-d_1}\right)^{s_1} + 1 \right]^{\frac{s_1}{1-s_1}}$$

Dette er den sædvanlige CES-efterspørgselsligning. Vi regner nu videre på udtrykket for *K*.

$$
\begin{aligned}
K &= \left(1-d_1\right)^{\frac{s_1}{1-s_1}} Y \left[\left(\frac{P_E}{P_K}\right)^{1-s_1} \left(\frac{d_1}{1-d_1}\right)^{s_1} + 1 \right]^{\frac{s_1}{1-s_1}} \\
&= \left(1-d_1\right)^{\frac{s_1}{1-s_1}} Y \cdot P_K^{-(1-s_1)\cdot\frac{s_1}{1-s_1}} \left[P_E^{1-s_1} \left(\frac{d_1}{1-d_1}\right)^{s_1} + P_K^{1-s_1} \right]^{\frac{s_1}{1-s_1}} \\
&= \left(1-d_1\right)^{\frac{s_1}{1-s_1}} Y \cdot P_K^{-s_1} \left[P_E^{1-s_1} \left(\frac{d_1}{1-d_1}\right)^{s_1} + P_K^{1-s_1} \right]^{\frac{s_1}{1-s_1}} \\
&= \left(1-d_1\right)^{s_1} Y \cdot P_K^{-s_1} \\
&\quad \cdot \left[d_1^{s_1} \left(1-d_1\right)^{-s_1} \left(1-d_1\right)^{s_1} P_E^{1-s_1} + \left(1-d_1\right)^{s_1} P_K^{1-s_1} \right]^{\frac{s_1}{1-s_1}} \\
&= \left(1-d_1\right)^{s_1} Y \cdot P_K^{-s_1} \left[d_1^{s_1} P_E^{1-s_1} + \left(1-d_1\right)^{s_1} P_K^{1-s_1} \right]^{\frac{s_1}{1-s_1}} \\
&= \left(1-d_1\right)^{s_1} Y \left(\frac{P_K}{P_Y}\right)^{-s_1}
\end{aligned}
\tag{56}
$$

Det sidste lighedstegn følger af, at vi definerer CES-prisindekset P_Y som (57). Dette er prisen på elydelsen (Y) bestemt ved at vægte priserne på elapparater og el.

$$
P_Y = \left[d_1^{s_1} P_E^{1-s_1} + \left(1-d_1\right)^{s_1} P_K^{1-s_1} \right]^{\frac{1}{1-s_1}} \tag{57}
$$

Dermed kan efterspørgselsligningen for K givet Y formuleres log-lineært.

$$
\log\left(K^*\right) = \log\left(Y\right) + s_1 \log\left(1-d_1\right) - s_1 \log\left(\frac{P_K}{P_Y}\right) \tag{58}
$$

På symmetrisk vis findes efterspørgselsligningen for E givet Y.

$$
\log\left(E^*\right) = \log\left(Y\right) + s_1 \log\left(d_1\right) - s_1 \log\left(\frac{P_E}{P_Y}\right) \tag{59}
$$

Heraf kan vi se, at forholdet mellem *E* og *K* er bestemt af deres indbyrdes prisforhold med substitutionselasticiteten σ_1, (dette er forholdet mellem de to førsteordensbetingelser, vi startede med at se på i (52)).

$$\frac{E^*}{K^*} = \left(\frac{d_1}{1-d_1}\right)^{s_1} \left(\frac{P_E}{P_K}\right)^{-s_1} \tag{60}$$

Endnu mangler vi efterspørgselsligningen for *Y*, som vi finder ved at dividere førsteordensbetingelserne for *X* og *E* med hinanden, indsætte ovenstående udtryk for *E*, og udnytte budgetrestriktionen til at give efterspørgselsligningen for *Y*.

Førsteordensbetingelserne (41) og (42) sættes lig 0 og divideres med hinanden, hvorefter udtrykkene for differentialerne (46), (47) og (48) indsættes.

$$\frac{P_E}{P_X} = \frac{\frac{\partial u(.)}{\partial Y}\frac{\partial y(.)}{\partial E}}{\frac{\partial u(.)}{\partial X}} \Leftrightarrow \frac{P_E}{P_X} = \frac{d_2}{1-d_2}\left(\frac{Y}{X}\right)^{-\frac{1}{s_2}} d_1 \left(\frac{E}{Y}\right)^{-\frac{1}{s_1}} \tag{61}$$

Vi omskriver nu på *E*-efterspørgselsligningen (59) og indsætter det ovenfor.

$$E = Y \cdot d_1^{s_1}\left(\frac{P_E}{P_Y}\right)^{-s_1} \Leftrightarrow \left(\frac{E}{Y}\right)^{-\frac{1}{s_1}} \cdot d_1 = \left(\frac{P_E}{P_Y}\right)^{-s_1\left(-\frac{1}{s_1}\right)} = \frac{P_E}{P_Y} \tag{62}$$

$$\begin{aligned} &\frac{P_E}{P_X} = \frac{d_2}{1-d_2}\left(\frac{Y}{X}\right)^{-\frac{1}{s_2}} \frac{P_E}{P_Y} \Leftrightarrow \frac{Y}{X} = \left(\frac{P_Y}{P_X}\right)^{-s_2}\left(\frac{1-d_2}{d_2}\right)^{-s_2} \Leftrightarrow \\ &X = Y\left(\frac{d_2}{1-d_2}\right)^{-s_2}\left(\frac{P_X}{P_Y}\right)^{-s_2} \end{aligned} \tag{63}$$

Udtrykket for *X* indsættes nu i budgetrestriktionen (36), og *Y* isoleres i udtrykket.

$$\begin{aligned} C &= P_Y Y + P_X X = P_Y Y + P_X \cdot Y\left(\frac{d_2}{1-d_2}\right)^{-s_2}\left(\frac{P_X}{P_Y}\right)^{-s_2} \\ &= Y\left(P_Y + \left(\frac{d_2}{1-d_2}\right)^{-s_2} P_X^{1-s_2} P_Y^{s_2}\right) \end{aligned} \tag{64}$$

$$
\begin{aligned}
\Leftrightarrow Y &= C\left(P_Y+\left(\frac{d_2}{1-d_2}\right)^{-s_2} P_X^{1-s_2} P_Y^{s_2}\right)^{-1} \\
&= C\cdot d_2^{s_2}\cdot P_Y^{-s_2}\left(d_2^{s_2}\cdot P_Y^{1-s_2}+\left(1-d_2^{s_2}\right)P_X^{1-s_2}\right)^{-1} \\
&= C\cdot d_2^{s_2}\cdot P_Y^{-s_2}\cdot P_C^{s_2-1} \\
&= \frac{C}{P_C}\cdot d_2^{s_2}\cdot\left(\frac{P_Y}{P_C}\right)^{-s_2}
\end{aligned}
\tag{65}
$$

Hvor vi har defineret CES-prisindekset P_C som (66). Niveauet for elydelsen (Y) afhænger altså af forbrug i faste priser, C/P_C.

$$
P_C=\left[d_2^{s_2}P_Y^{1-s_2}+\left(1-d_2\right)^{s_2}P_X^{1-s_2}\right]^{\frac{1}{1-s_2}} \tag{66}
$$

Efterspørgselsligningen for Y kan ligeledes formuleres log-lineært.

$$
\log\left(Y^*\right)=\log\left(\frac{C}{P_C}\right)+s_2\log\left(d_2\right)-s_2\log\left(\frac{P_Y}{P_C}\right) \tag{67}
$$

Til slut indsubstitutierer vi Y-efterspørgselsligningen i E- og K-efterspørgselsligningerne, og dermed fremkommer de to efterspørgselsligninger, vi vil estimere.

$$
\log\left(E^*\right)=\log\left(\frac{C}{P_C}\right)+s_1\log\left(d_1\right)+s_2\log\left(d_2\right)-s_1\log\left(\frac{P_E}{P_Y}\right)-s_2\log\left(\frac{P_Y}{P_C}\right) \tag{68}
$$

$$
\log\left(K^*\right)=\log\left(\frac{C}{P_C}\right)+s_1\log\left(1-d_1\right)+s_2\log\left(d_2\right)-s_1\log\left(\frac{P_K}{P_Y}\right)-s_2\log\left(\frac{P_Y}{P_C}\right) \tag{69}
$$

Som tabelvariabel i modellen kan vi beregne elydelsen Y enten som CES-aggregatet af E og K (37) eller med efterspørgselsligningen (67).

A.2. To-trinsløsning

En anden mulighed er at løse problemet i to trin, og i MAR18499 vises det, at det giver samme løsning. Først bestemmes efterspørgslen efter el og elapparater givet elydelsen, fx estimeres forholdet mellem el og elapparater afhængende af prisforholdet, (hvorved CES-prisindekset P_Y kan udelades). Derefter bestemmes forholdet mellem elydelse og øvrigt forbrug, hvor elydelsen er dannet som et (næsten) vilkårligt aggregat af el og elapparater.

Minimering af omkostningerne til elydelse med en CES-produktionsfunktion som bibetingelse er (70). Efterspørgselsligningerne for el og apparatbestand bliver sædvanlige CES-efterspørgselsligninger.

$$\begin{aligned} &\text{Min}_{E,K} \quad P_E E + P_K K \\ &s.t. \qquad Y = y(E,K) = \left[d_1 E^{\frac{s_1 - 1}{s_1}} + (1 - d_1) K^{\frac{s_1 - 1}{s_1}} \right]^{\frac{s_1}{s_1 - 1}} \end{aligned} \tag{70}$$

Maksimering af CES-nyttefunktion med budgetrestriktion som bibetingelse giver forholdet mellem elydelse og andet forbrug.

$$\begin{aligned} &\text{Max}_{Y,X}\, U = u(Y,X) = \left[d_2 Y^{\frac{s_2 - 1}{s_2}} + (1 - d_2) X^{\frac{s_2 - 1}{s_2}} \right]^{\frac{s_2}{s_2 - 1}} \\ &s.t. \qquad C = P_Y Y + P_X X \end{aligned} \tag{71}$$

Vi foretrækker dog løsningen i et trin, hvorved der ikke skal konstrueres data for elydelsen til at estimere på.

A.3. Priselasticiteter

I et almindeligt CES-system med to komponenter er egenpris- og krydspris-elasticiteterne givet fra substitutionselasticiteten og omkostningsandelene. Vi starter med at udlede disse elasticiteter. De bestemmes ved at ved at differentiere efterspørgselsfunktionerne for E^* og K^* mht. P_E og P_K for fastholdt Y. Vi kalder dette de betingende elasticiteter. I det nestede system udregner vi derefter de totale elasticiteter.

De relevante ligninger er efterspørgselsligningerne for E^* og K^* og prisen på elydelse, P_Y, som gentages her.

$$\log\left(E^*\right)=\log\left(Y^*\right)+s_1\log\left(d_1\right)-s_1\log\left(\frac{P_E}{P_Y}\right) \tag{72}$$

$$\log\left(K^*\right)=\log\left(Y^*\right)+s_1\log\left(1-d_1\right)-s_1\log\left(\frac{P_K}{P_Y}\right) \tag{73}$$

$$P_Y=\left[d_1^{s_1}P_E^{1-s_1}+\left(1-d_1\right)^{s_1}P_K^{1-s_1}\right]^{\frac{1}{1-s_1}} \tag{74}$$

Vi skal bruge CES-prisindekset differentieret logaritmisk mht. de indgående priser, dvs. hvor mange % P_Y ændres, når P_E eller P_K ændres 1%.

$$\begin{aligned}\frac{\partial\log P_Y}{\partial\log P_E}&=\frac{\partial P_Y/P_Y}{\partial P_E/P_E}\\&=\frac{P_E}{P_Y}\frac{1}{1-s_1}\left[d_1^{s_1}P_E^{1-s_1}+\left(1-d_1\right)^{s_1}P_K^{1-s_1}\right]^{\frac{1}{1-s_1}-1}d_1^{s_1}\left(1-s_1\right)P_E^{-s_1}\\&=d_1^{s_1}\left(\frac{P_E}{P_Y}\right)^{1-s_1}\end{aligned} \tag{75}$$

Hvilket netop er den optimale omkostningsandel for el, S_E^*.

$$\begin{aligned}S_E^*&=\frac{E^*\cdot P_E}{E^*\cdot P_E+K^*\cdot P_K}=\frac{Y\,d_1^{s_1}P_Y^{s_1}P_E^{-s_1}P_E}{Y\,d_1^{s_1}P_Y^{s_1}P_E^{-s_1}P_E+Y\left(1-d_1\right)^{s_1}P_Y^{s_1}P_K^{-s_1}P_K}\\&=\frac{YP_Y^{s_1}d_1^{s_1}P_E^{1-s_1}}{YP_Y^{s_1}\left(d_1^{s_1}P_E^{1-s_1}+\left(1-d_1\right)^{s_1}P_K^{1-s_1}\right)}=\frac{d_1^{s_1}P_E^{1-s_1}}{P_Y^{1-s_1}}=d_1^{s_1}\left(\frac{P_E}{P_Y}\right)^{1-s_1}\end{aligned} \tag{76}$$

Tilsvarende findes at

$$\frac{\partial\log P_Y}{\partial\log P_K}=\frac{\partial P_Y/P_Y}{\partial P_K/P_K}=\left(1-S_E^*\right) \tag{77}$$

Nu er vi klar til at udregne priselasticiteterne for fastholdt Y.

$$x^*_{E,P_E|Y} = \left.\frac{\partial \log E^*}{\partial \log P_E}\right|_Y = -s_1 + s_1 \frac{\partial \log P_Y}{\partial \log P_E} = -s_1 + s_1 S_E^* \tag{78}$$
$$= -s_1\left(1 - S_E^*\right) < 0$$

$$x^*_{E,P_K|Y} = \left.\frac{\partial \log E^*}{\partial \log P_K}\right|_Y = s_1 \frac{\partial \log P_Y}{\partial \log P_K} = s_1\left(1 - S_E^*\right) > 0 \tag{79}$$

$$x^*_{K,P_E|Y} = \left.\frac{\partial \log K^*}{\partial \log P_E}\right|_Y = s_1 \frac{\partial \log P_Y}{\partial \log P_E} = s_1 S_E^* > 0 \tag{80}$$

$$x^*_{K,P_K|Y} = \left.\frac{\partial \log K^*}{\partial \log P_K}\right|_Y = -s_1 + s_1 \frac{\partial \log P_Y}{\partial \log P_K} = -s_1 + s_1\left(1 - S_E^*\right) \tag{81}$$
$$= -s_1 S_E^* < 0$$

De betingende egenpriselasticiteterne er negative. De betingede krydspris-elasticiteterne er positive, så givet Y er der prisafhængig substitution mellem E og K. Sædvanligvis vælges det at anvende den faktiske omkostningsandel for E i stedet for den langsigtede, når der rapporteres priselasticiteter i et CES-system, hvor det er substitutionselasticiteten, der estimeres.

For at udregne de totale priselasticiteter, skal vi udregne effekten på elydelsen ved en ændring i prisen på el eller apparater. Efterspørgselsligningen for Y gentages først.

$$\log\left(Y^*\right) = \log\left(\frac{C}{P_C}\right) + s_2 \log\left(d_2\right) - s_2 \log\left(\frac{P_Y}{P_C}\right) \tag{82}$$

Effekten på P_C ved en ændring i P_E eller P_K kommer fra en ændring i P_Y, men er i dette system ganske lille, da omkostningen til elydelse er meget lille sammenholdt med øvrigt forbrug. I estimationerne bruges et eksogent prisindeks i stedet for CES-prisindekset P_C, så vi ser bort fra denne effekt her.

$$\frac{\partial \log Y^*}{\partial \log P_E} = -s_2 \frac{\partial \log P_Y}{\partial \log P_E} = -s_2 S_E^* < 0 \tag{83}$$

$$\frac{\partial \log Y^*}{\partial \log P_K} = -s_2 \frac{\partial \log P_Y}{\partial \log P_K} = -s_2 \left(1 - S_E^*\right) < 0 \tag{84}$$

Dermed kan vi udregne de totale priselasticiteter, og det noteres, at der lægges et negativt tal til de betingende priselasticiteter for at få de totale.

$$\begin{aligned} x_{E,P_E}^* &= \frac{\partial \log E^*}{\partial \log P_E} = \frac{\partial \log Y^*}{\partial \log P_E} - s_1 + s_1 \frac{\partial \log P_Y}{\partial \log P_E} = -s_2 S_E^* - s_1 + s_1 S_E^* \\ &= -s_1 + \left(s_1 - s_2\right) S_E^* < 0 \end{aligned} \tag{85}$$

$$\begin{aligned} x_{E,P_K}^* &= \frac{\partial \log E^*}{\partial \log P_K} = \frac{\partial \log Y^*}{\partial \log P_K} + s_1 \frac{\partial \log P_Y}{\partial \log P_K} = -s_2 \left(1 - S_E^*\right) + s_1 \left(1 - S_E^*\right) \\ &= \left(s_1 - s_2\right)\left(1 - S_E^*\right) \end{aligned} \tag{86}$$

$$\begin{aligned} x_{K,P_E}^* &= \frac{\partial \log K^*}{\partial \log P_E} = \frac{\partial \log Y^*}{\partial \log P_E} + s_1 \frac{\partial \log P_Y}{\partial \log P_E} = -s_2 S_E^* + s_1 S_E^* \\ &= \left(s_1 - s_2\right) S_E^* \end{aligned} \tag{87}$$

$$\begin{aligned} x_{K,P_K}^* &= \frac{\partial \log E^*}{\partial \log P_K} = \frac{\partial \log Y^*}{\partial \log P_K} - s_1 + s_1 \frac{\partial \log P_Y}{\partial \log P_K} = -s_2 \left(1 - S_E^*\right) - s_1 + s_1 \left(1 - S_E^*\right) \\ &= -s_1 + \left(s_1 - s_2\right)\left(1 - S_E^*\right) < 0 \end{aligned} \tag{88}$$

Tilsvarende kan de totale priselasticiteter naturligvis findes ved at differentiere efterspørgselsligningerne for E^* og K^* med udtrykket for Y^* indsat (68) og (69).

Vi udleder nu en betingelse, der sikrer, at el og elapparater (på lang sigt) er komplementære goder i det samlede forbrugssystem. Dvs. at stigende elpris skal give et fald i apparatbestanden (negativ krydspriselasticitet i det samlede system).

$$x^{*}_{K,P_E} < 0 \Leftrightarrow (s_1 - s_2) < 0 \Leftrightarrow s_1 < s_2 \tag{89}$$

A.4. Effektivitetskorrigering (trende)

Vi indfører nu effektivitetsindeks på de tre faktorer, henholdsvis d_E, d_K og d_Y, og går over til at regne i effektivitetskorrigerede mængder og priser, dvs. $E \cdot d_E$, $K \cdot d_K$, $Y \cdot d_Y$, P_E / d_E, P_K / d_K og P_Y / d_Y. Denne formulering sikrer, at omkostningerne er uændret.

Vi har følgende efterspørgselsligninger for E^* (59), K^* (58) og Y^* (67) og CES-prisindekset P_Y (57). Når vi indsætter de effektivitetskorrigerede priser for E og K i CES-prisindekset P_Y, (som vi så betegner med en tilde for at kunne se forskel) er dette indeks den effektivitetskorrigerede pris på Y.

$$\tilde{P}_Y = \left(d_1^{s_1} \left(\frac{P_E}{d_E} \right)^{1-s_1} + (1-d_1)^{s_1} \left(\frac{P_K}{d_K} \right)^{1-s_1} \right)^{\frac{1}{1-s_1}} = P_Y / d_Y \tag{90}$$

$$\begin{aligned} \log\left(E^* \cdot d_E\right) &= \log\left(Y \cdot d_Y\right) + s_1 \log\left(d_1\right) - s_1 \log\left(\frac{P_E / d_E}{P_Y / d_Y} \right) \Leftrightarrow \\ \log\left(E^*\right) &= \log\left(Y \cdot d_Y\right) + s_1 \log\left(d_1\right) - s_1 \log\left(\frac{P_E}{\tilde{P}_Y} \right) - (1-s_1)\log\left(d_E\right) \end{aligned} \tag{91}$$

$$\begin{aligned} \log\left(K^* \cdot d_K\right) &= \log\left(Y \cdot d_Y\right) + s_1 \log\left(1-d_1\right) - s_1 \log\left(\frac{P_K / d_K}{P_Y / d_Y} \right) \Leftrightarrow \\ \log\left(K^*\right) &= \log\left(Y \cdot d_Y\right) + s_1 \log\left(1-d_1\right) - s_1 \log\left(\frac{P_K}{\tilde{P}_Y} \right) - (1-s_1)\log\left(d_K\right) \end{aligned} \tag{92}$$

$$\log\left(Y^{*}\cdot d_{Y}\right)=\log\left(\frac{C}{P_{C}}\right)+s_{2}\log\left(d_{2}\right)-s_{2}\log\left(\frac{P_{Y}/d_{Y}}{P_{C}}\right) \\ =\log\left(\frac{C}{P_{C}}\right)+s_{2}\log\left(d_{2}\right)-s_{2}\log\left(\frac{\tilde{P}_{Y}}{P_{C}}\right) \tag{93}$$

$$\Leftrightarrow \log\left(Y^{*}\right)=\log\left(\frac{C}{P_{C}}\right)+s_{2}\log\left(d_{2}\right)-s_{2}\log\left(\frac{P_{Y}}{P_{C}}\right)-\left(1-s_{2}\right)\log\left(d_{Y}\right) \tag{94}$$

Ligesom uden effektivitetsindeks indsætter vi nu efterspørgselsudtrykket for Y i E- og K- efterspørgselsligningerne. Men vi skal bruge et udtryk for $Y\cdot d_Y$, og det er jo netop højresiden i (93), så vi får altså følgende efterspørgselsligninger for E og K, hvor vi bemærker, at d_Y helt er udgået og dermed ikke kan estimeres.

$$\log\left(E^{*}\right)=\log\left(\frac{C}{P_{C}}\right)+s_{2}\log\left(d_{2}\right)-s_{2}\log\left(\frac{\tilde{P}_{Y}}{P_{C}}\right)+s_{1}\log\left(d_{1}\right)-s_{1}\log\left(\frac{P_{E}}{\tilde{P}_{Y}}\right) \\ -\left(1-s_{1}\right)\log\left(d_{E}\right) \tag{95}$$

$$\log\left(K^{*}\right)=\log\left(\frac{C}{P_{C}}\right)+s_{2}\log\left(d_{2}\right)-s_{2}\log\left(\frac{\tilde{P}_{Y}}{P_{C}}\right)+s_{1}\log\left(1-d_{1}\right)-s_{1}\log\left(\frac{P_{K}}{\tilde{P}_{Y}}\right) \\ -\left(1-s_{1}\right)\log\left(d_{K}\right) \tag{96}$$

Vi skal altså estimere systemet med de to efterspørgselsligninger for E (95) og K (96) med tilhørende prisindeks P_Y (90).

Forholdet mellem E og K med effektivitetskorrigering er (97), som vi kan bruge til at se, hvorledes forholdet mellem el og elapparater ændres ved en effektivitets-ændring. Ved en stigning i eleffektiviteten vil elforbruget faldet i forhold til bestanden af apparater (elforbrug pr. apparat) - underordnet hvad Y er.

$$\log\left(\frac{E^{*}}{K^{*}}\right)=s_{1}\log\left(\frac{d_{1}}{1-d_{1}}\right)-s_{1}\log\left(\frac{P_{E}}{P_{K}}\right)-\left(1-s_{1}\right)\log\left(\frac{d_{E}}{d_{K}}\right) \tag{97}$$

Til estimationsbrug skal der specificeres udtryk for effektivitetsindeksene, og her vælges lineære eller kvadratiske tidstrende.

$$\log(d_i) = w_{1i} t + w_{2i} t^2 \ , \quad i = E, K \tag{98}$$

Hvis vi i modellen vil have et udtryk for den effektivitetskorrigerede elydelse, kan vi danne effektivitetsindekset på elydelse d_Y ved at vægte effektivitetsindeksene på el d_E og elapparater d_K - fx med deres omkostningsandele. I MAR18499 anbefales følgende restiktion på effektivitetsindeks i en nestet produktionsfunktion, hvor S_E er omkostningsandelen for el, og (1-S_E) er omkostningsandelen for elapparater. Rimeligheden i denne vægtning i tilfældet her med CES-funktioner eftervises i afsnit A.6.

$$\left(\frac{d_E}{d_Y}\right)^{S_E} \left(\frac{d_K}{d_Y}\right)^{(1-S_E)} = 1 \Leftrightarrow \log(d_Y) = S_E \log(d_E) + (1 - S_E)\log(d_K) \tag{99}$$

Vi estimerer to af effektivitetsindeksene (d_E og d_K), men kan eventuelt indbygge det sidste (d_Y) i modellen ud fra restriktionen i (99).

Som tabelvariabler i modellen vil vi gerne have udtryk for elydelsen på lang og kort sigt. På lang sigt er der følgende to (ækvivalente) udtryk for elydelsen, henholdsvis den udledte efterspørgselsligning for Y^* (100) og CES-aggregatet af E^* og K^* (101).

$$\log(Y^*) = \log\left(\frac{C}{P_C}\right) + s_2 \log(d_2) - s_2 \log\left(\frac{\tilde{P}_Y}{P_C}\right) - \log(d_Y) \tag{100}$$

$$Y^* = y(E^*, K^*) = \left[d_1 (E^*)^{\frac{s_1 - 1}{s_1}} + (1 - d_1)(K^*)^{\frac{s_1 - 1}{s_1}} \right]^{\frac{s_1}{s_1 - 1}} \tag{101}$$

På kort sigt beregner vi elydelsen som CES-aggregatet af E og K.

$$Y = y(E, K) = \left[d_1 E^{\frac{s_1 - 1}{s_1}} + (1 - d_1) K^{\frac{s_1 - 1}{s_1}} \right]^{\frac{s_1}{s_1 - 1}} \tag{102}$$

Den effektivitetskorrigerede elydelse findes ved at gange med det beregnede elydelseseffektivitetsindeks.

A.5. Effektivitetselasticiteter

Nu udregner vi så ”effektivitetselasticiteten”, dvs. %-vis ændring i E og K ved en %-vis ændring i de to effektiviteter d_E og d_K. Først de betingende elasticiteter, dvs.

for fastholdt Y, som i et almindeligt CES-system. Derefter beregnes de totale elasticiteter.

Ligningerne, der skal differentieres i det følgende, gentages fra ovenstående afsnit.

$$\log\left(E^*\right) = \log\left(Y \cdot d_Y\right) + s_1 \log\left(d_1\right) - s_1 \log\left(\frac{P_E}{\tilde{P}_Y}\right) - \left(1 - s_1\right)\log\left(d_E\right) \quad (103)$$

$$\log\left(K^*\right) = \log\left(Y \cdot d_Y\right) + s_1 \log\left(1 - d_1\right) - s_1 \log\left(\frac{P_K}{\tilde{P}_Y}\right) - \left(1 - s_1\right)\log\left(d_K\right) \quad (104)$$

$$\tilde{P}_Y = \left(d_1^{s_1}\left(\frac{P_E}{d_E}\right)^{1-s_1} + \left(1 - d_1\right)^{s_1}\left(\frac{P_K}{d_K}\right)^{1-s_1}\right)^{\frac{1}{1-s_1}} \quad (105)$$

Det effektivitetskorrigerede CES-prisindeks differentieres logaritmisk mht. d_E og d_K (samme udregning som for priserne).

$$\begin{aligned}
\frac{\partial \log \tilde{P}_Y}{\partial \log d_E} &= \frac{\partial \tilde{P}_Y / \tilde{P}_Y}{\partial d_E / d_E} \\
&= \frac{d_E}{\tilde{P}_Y}\frac{1}{1-s_1}\left(d_1^{s_1}\left(\frac{P_E}{d_E}\right)^{1-s_1} + \left(1 - d_1\right)^{s_1}\left(\frac{P_K}{d_K}\right)^{1-s_1}\right)^{\frac{1}{1-s}-1} \\
&\quad \cdot d_1^{s_1} P_E^{1-s_1} d_E^{-(1-s_1)-1}\left(-1\right)\left(1 - s_1\right) \\
&= -\frac{1-s_1}{1-s_1} d_1^{s_1} P_E^{1-s_1} d_E^{1-2+s_1} \tilde{P}_Y^{-1+s_1} \\
&= -d_1^{s_1}\left(\frac{P_E / d_E}{\tilde{P}_Y}\right)^{1-s_1} \\
&= -S_E^* < 0
\end{aligned} \quad (106)$$

$$\frac{\partial \log \tilde{P}_Y}{\partial \log d_K} = -\left(1 - S_E^*\right) < 0 \tag{107}$$

For fastholdt Y (og d_Y) finder vi de betingde effektivitetselasticiteter og deres sammenhæng med de betingede priselasticiteter.

$$\begin{aligned} x^*_{E,d_E|Y} &= \left.\frac{\partial \log E^*}{\partial \log d_E}\right|_Y = s_1 \frac{\partial \log \tilde{P}_Y}{\partial \log d_E} - \left(1 - s_1\right) = -s_1 S_E^* - \left(1 - s_1\right) \\ &= -\left(1 + x^*_{E,P_E|Y}\right) < 0 \end{aligned} \tag{108}$$

Fortegnsvurderingen gælder, når egenpriselasticiteten er mellem 0 og -1. Hvis eleffektiviteten stiger med 1%, falder - i det betingede system - efterspørgslen efter el, men med mindre end 1%, da der sker en prisafhængig substitution over mod el, hvis effektivitetskorrigerede pris nu er billigere.

$$x^*_{E,d_K|Y} = \left.\frac{\partial \log E^*}{\partial \log d_K}\right|_Y = s_1 \frac{\partial \log \tilde{P}_Y}{\partial \log d_K} = -s_1\left(1 - S_E^*\right) = -x^*_{E,P_K|Y} < 0 \tag{109}$$

At krydseffektivitetselasticiteten er lig med minus krydspriselasticiteten følger af, at E kun afhænger af P_K / d_K gennem CES-prisen på aggregatet. E's betingede elasticitet mht. d_K er negativ, da den betingende krydspriselasticitet er positiv.

$$x^*_{K,d_E|Y} = \left.\frac{\partial \log K^*}{\partial \log d_E}\right|_Y = s_1 \frac{\partial \log \tilde{P}_Y}{\partial \log d_E} = -s_1 S_E^* = -x^*_{K,P_E|Y} < 0 \tag{110}$$

$$\begin{aligned} x^*_{K,d_K|Y} &= \left.\frac{\partial \log K^*}{\partial \log d_K}\right|_Y = s_1 \frac{\partial \log \tilde{P}_Y}{\partial \log d_K} - \left(1 - s_1\right) = -s_1\left(1 - S_E^*\right) - \left(1 - s_1\right) \\ &= -\left(1 + x^*_{K,P_K|Y}\right) < 0 \end{aligned} \tag{111}$$

Til hjælp med at udregne de totale effektivitetselasticiteter gentages den effektivitetskorrigerede efterspørgselsligning for Y^*, og den differentieres logaritmisk mht. de to effektivitetsindeks, d_E og d_K.

$$\log\left(Y^* \cdot d_Y\right) = \log\left(\frac{C}{P_C}\right) + s_2 \log\left(d_2\right) - s_2 \log\left(\frac{\tilde{P}_Y}{P_C}\right) \tag{112}$$

$$\frac{\partial \log\left(Y^* \cdot d_Y\right)}{\partial \log d_E} = -s_2 \frac{\partial \log \tilde{P}_Y}{\partial \log d_E} = s_2 S_E^* > 0 \tag{113}$$

$$\frac{\partial \log\left(Y^* \cdot d_Y\right)}{\partial \log d_K} = -s_2 \frac{\partial \log \tilde{P}_Y}{\partial \log d_K} = s_2 \left(1 - S_E^*\right) > 0 \tag{114}$$

Nu kan vi udregne de totale effektivitetselasticiteter. De fremkommer fra de betingede ved at lægge et positivt tal til.

$$\begin{aligned} x^*_{E,d_E} &= \frac{\partial \log E^*}{\partial \log d_E} = \frac{\partial \log\left(Y^* \cdot d_Y\right)}{\partial \log d_E} + s_1 \frac{\partial \log \tilde{P}_Y}{\partial \log d_E} - \left(1 - s_1\right) \\ &= s_2 S_E^* - s_1 S_E^* - \left(1 - s_1\right) = -\left(1 + x^*_{E,P_E}\right) < 0 \end{aligned} \tag{115}$$

$$\begin{aligned} x^*_{K,d_K} &= \frac{\partial \log K^*}{\partial \log d_K} = \frac{\partial \log\left(Y^* \cdot d_Y\right)}{\partial \log d_K} + s_1 \frac{\partial \log \tilde{P}_Y}{\partial \log d_K} - \left(1 - s_1\right) \\ &= s_2 \left(1 - S_E^*\right) - s_1 \left(1 - S_E^*\right) - \left(1 - s_1\right) = -\left(1 + x^*_{K,P_K}\right) < 0 \end{aligned} \tag{116}$$

De totale egeneffektivitetselasticiteter er negative, men tættere på nul end de betingede.

$$\begin{aligned} x^*_{E,d_K} &= \frac{\partial \log E^*}{\partial \log d_K} = \frac{\partial \log\left(Y^* \cdot d_Y\right)}{\partial \log d_K} + s_1 \frac{\partial \log \tilde{P}_Y}{\partial \log d_K} \\ &= s_2 \left(1 - S_E^*\right) - s_1 \left(1 - S_E^*\right) = -x^*_{E,P_K} > 0 \end{aligned} \tag{117}$$

$$x^*_{K,d_E} = \frac{\partial \log K^*}{\partial \log d_E} = \frac{\partial \log\left(Y^* \cdot d_Y\right)}{\partial \log d_E} + s_1 \frac{\partial \log \tilde{P}_Y}{\partial \log d_E}$$
$$= s_2 S^*_E - s_1 S^*_E = -x^*_{K,P_E} > 0 \tag{118}$$

At de totale krydseffektivitetselasticiteter er positive følger af, at det er antaget, at E og K er komplementære varer i det samlede system, dvs. $\sigma_1 < \sigma_2$. Der er altså det modsatte fortegn på de totale krydseffektivitetselasticiteter i forhold til de betingede elasticiteter.

A.6. Approksimationer

Når vi skal vurdere effekten på elydelse og prisen på elydelse ved multiplikatoreksperimenter kan det være nyttigt at se på en simpel approksimation af CES-funktionen og CES-prisindekset, nemlig at vægte henholdsvis mængder og priser med deres omkostningsandel, (vi ser her på tilfældet uden effektivitetsindeks).

$$\log(Y) \approx S_E \log(E) + (1 - S_E)\log(K) \tag{119}$$

$$\log(P_Y) \approx S_E \log(P_E) + (1 - S_E)\log(P_K) \tag{120}$$

Vi efterviser nu rimeligheden i disse intuitivt acceptable approksimationer. Vi starter med prisindekset. I (106) er udregnet elasticiteten af P_Y mht. P_E, og i (76) er det vist, at denne er lig med den optimale omkostningsandel for E. Når vi differentierer logaritmisk i (120), får vi S_E. Vi anvender altså en førsteordens logaritmisk approksimation med den faktiske omkostningsandel i stedet for den optimale.

$$\frac{\partial \log(P_Y)}{\partial \log(P_E)} = S^*_E \tag{121}$$

Tilsvarende udregner vi elasticiteten af Y mht. E. I (48) er elydelsesfunktionen $y(E,K)$ differentieret mht. E, så vi finder nemt elasticiteten.

$$x_{Y,E} = \frac{\partial y(.)/Y}{\partial E/E} = \frac{E}{Y} d_1 E^{-\frac{1}{s_1}} Y^{\frac{1}{s_1}} = d_1 Y^{-\left(1-\frac{1}{s_1}\right)} E^{1-\frac{1}{s_1}} \tag{122}$$

Her i indsættes efterspørgselsligningen for E, og der regnes videre.

$$x_{Y,E} = d_1 Y^{-\left(1-\frac{1}{s_1}\right)} \left(E^*\right)^{1-\frac{1}{s_1}} = d_1 Y^{-\left(1-\frac{1}{s_1}\right)} \left(Y d_1^{s_1} \left(\frac{P_E}{P_Y} \right)^{-s_1} \right)^{1-\frac{1}{s_1}}$$
$$= d_1 Y^{-\left(1-\frac{1}{s_1}\right)} Y^{1-\frac{1}{s_1}} d_1^{s_1-1} \left(\frac{P_E}{P_Y} \right)^{1-s_1} = d_1^{s_1} \left(\frac{P_E}{P_Y} \right)^{1-s_1} = S_E^* \tag{123}$$

Tilsvarende gælder altså, at vi anvender en førsteordens logaritmisk approksimation af CES-aggregatet af E og K, hvor vi anvender de faktiske omkostningsandele i stedet for de optimale.

Vi ser til slut nærmere på restriktionen mellem effektivitetsindeksene, der bestemmer d_Y, hvor vi vægter effektivitetsindeksene med deres tilhørende omkostningsandele (ligesom approksimationerne af Y og P_Y). Restriktionen skal sikre, at det effektivitetskorrigerede CES-prisindeks er den effektivitetskorrigerede pris på Y.

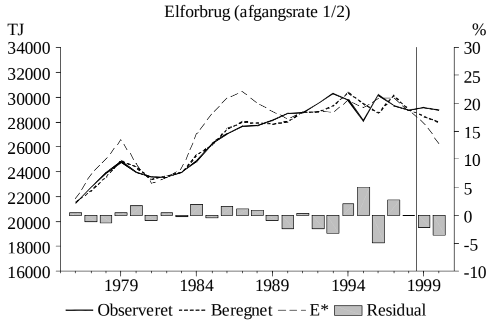
$$\tilde{P}_Y = P_Y / d_Y \Leftrightarrow \log\left(\tilde{P}_Y\right) = \log\left(P_Y\right) - \log\left(d_Y\right) \Leftrightarrow$$
$$\log\left(\tilde{P}_Y\right) = \log\left(P_Y\right) - S_E \log\left(d_E\right) - \left(1 - S_E\right) \log\left(d_K\right) \tag{124}$$

I den sidste linje har vi indsat den foreslåede restriktion (99). Når vi differentierer logaritmisk mht. d_E på begge sider af lighedstegnet, får vi henholdsvis -S_E^* (jf. 106) og -S_E, så med den foreslående restriktion anvendes den faktiske omkostningsandel i stedet for den optimale.

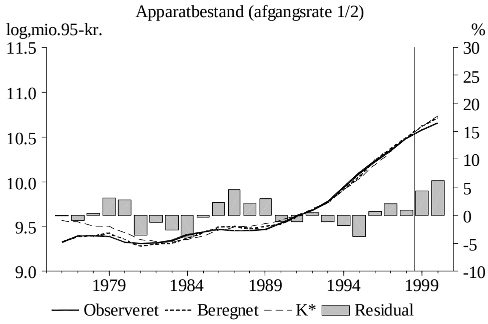
Bilag B. Historisk forklaringsevne og beregnet elydelse

Afgangsrate = 1/2

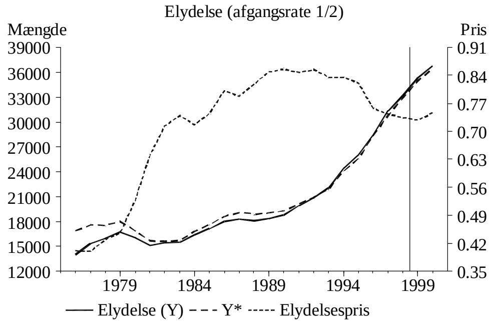
Elforbrug (afgangsrate 1/2)



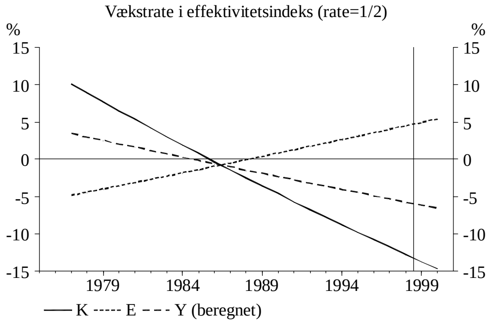
Apparatbestand (afgangsrate 1/2)



Elydelse (afgangsrate 1/2)

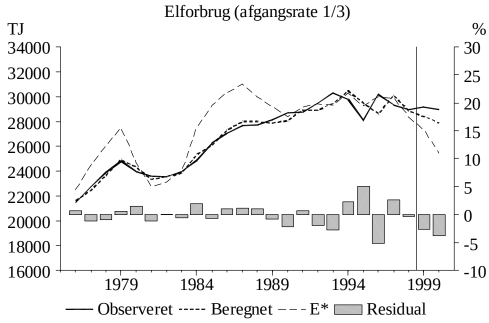


Vækstrate i effektivitetsindeks (rate=1/2)

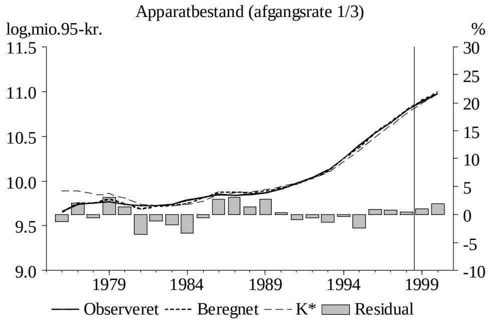


Afgangsrate = 1/3

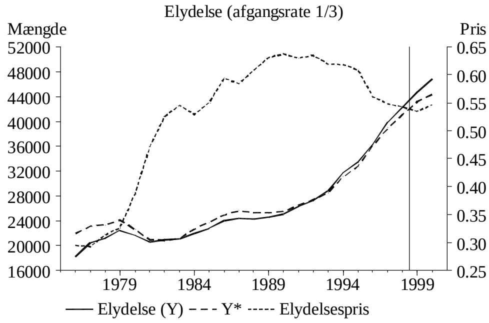
Elforbrug (afgangsrate 1/3)



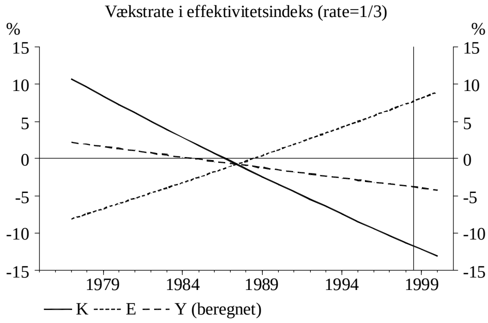
Apparatbestand (afgangsrate 1/3)



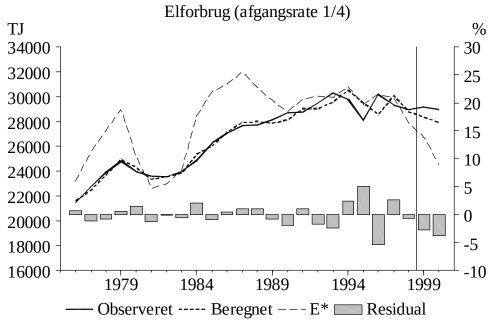
Elydelse (afgangsrate 1/3)

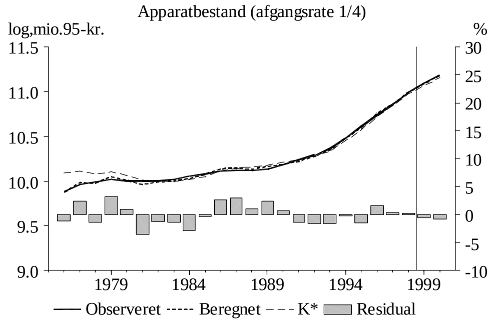


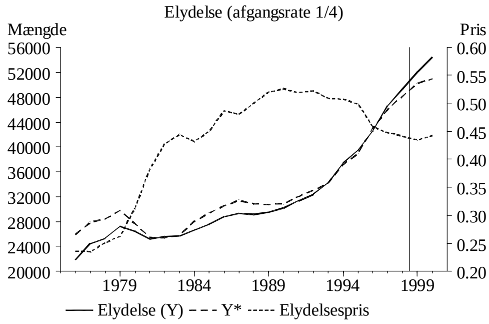
Vækstrate i effektivitetsindeks (rate=1/3)

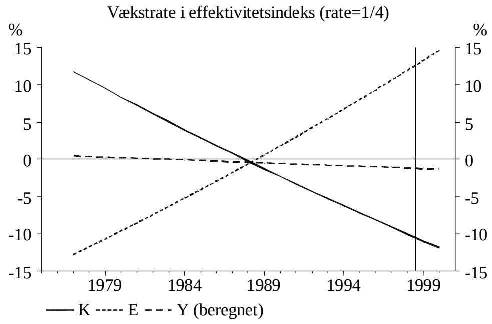


Afgangsrate = 1/4

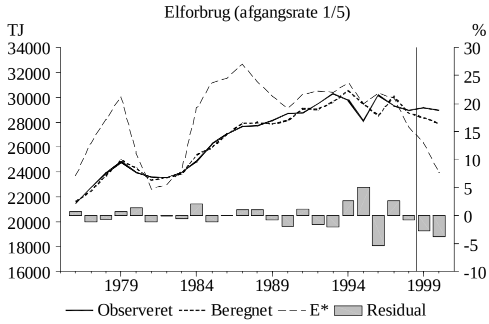


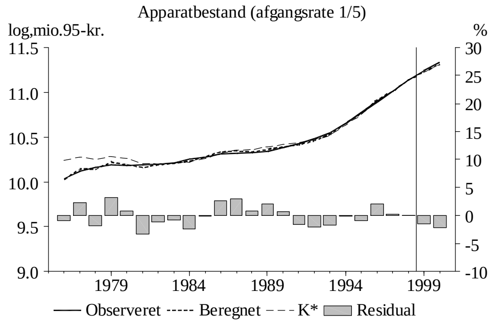


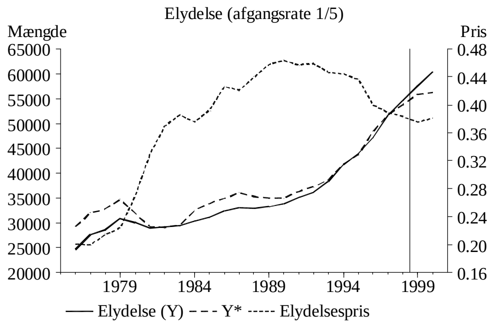


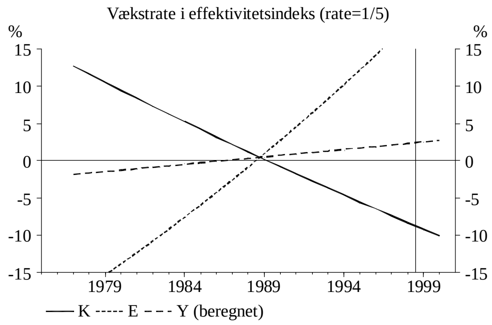


Afgangsrate = 1/5

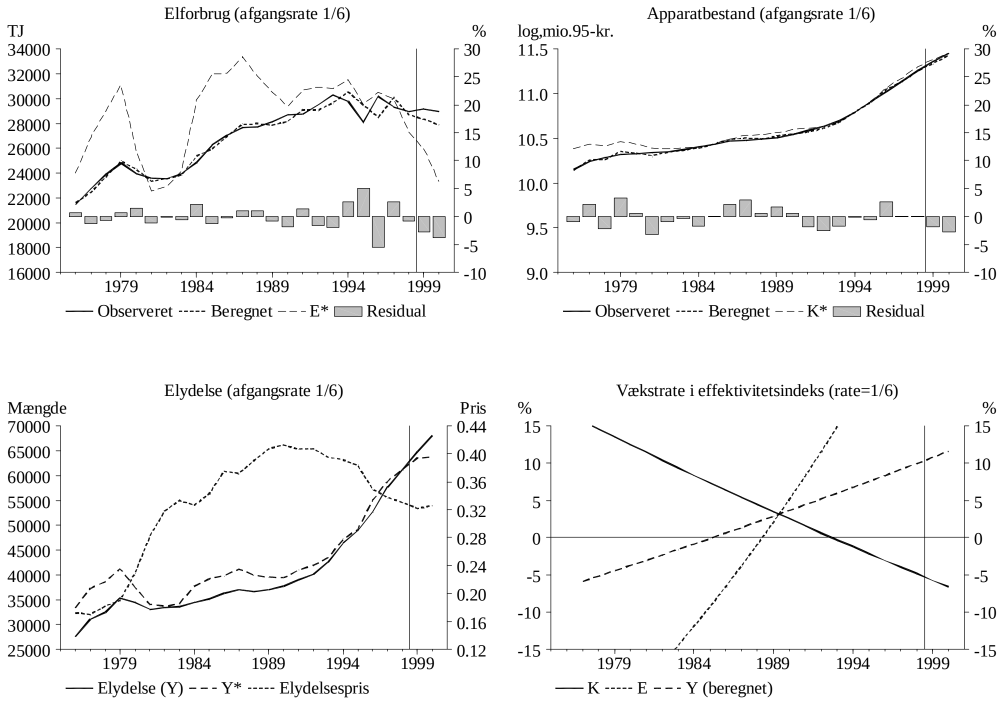




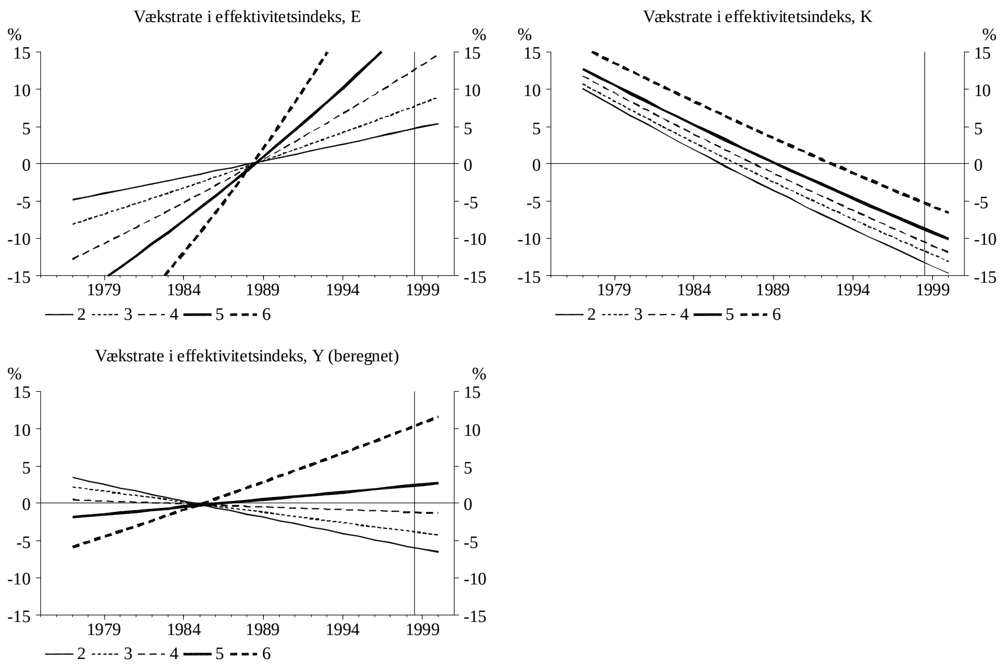




Afgangsrate = 1/6



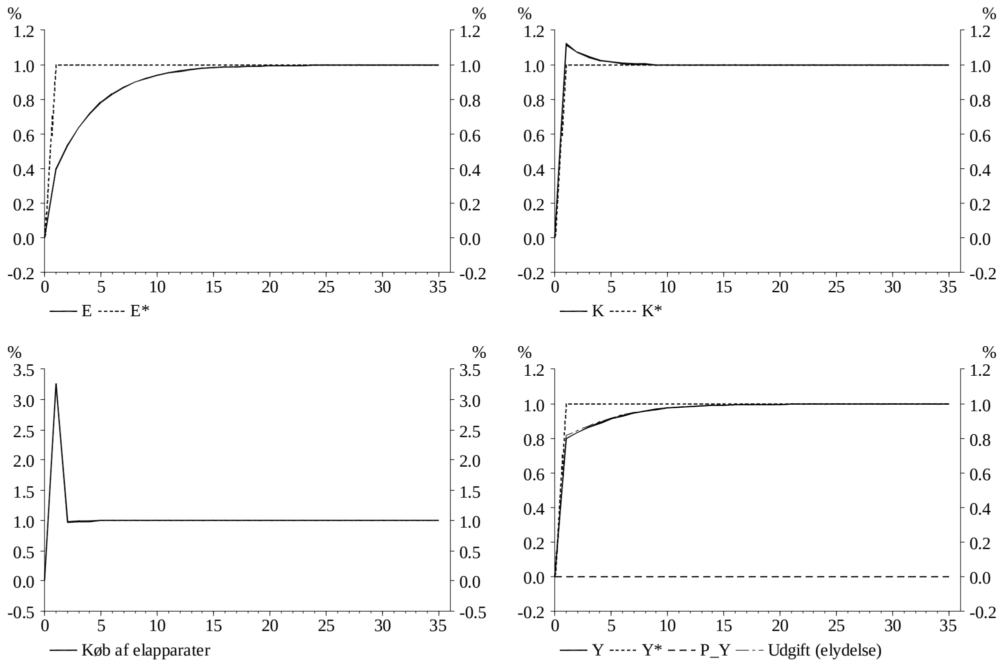
Figur B.1. Effektivitetsindeks i de fem estimationer



Bilag C. Multiplikatoreksperimenter i isoleret delmodel

Delmodel baseret på estimation med afskrivningsrate på 1/3. Der anvendes et steady-state grundforløb.

Figur C.1. Budget + 1%



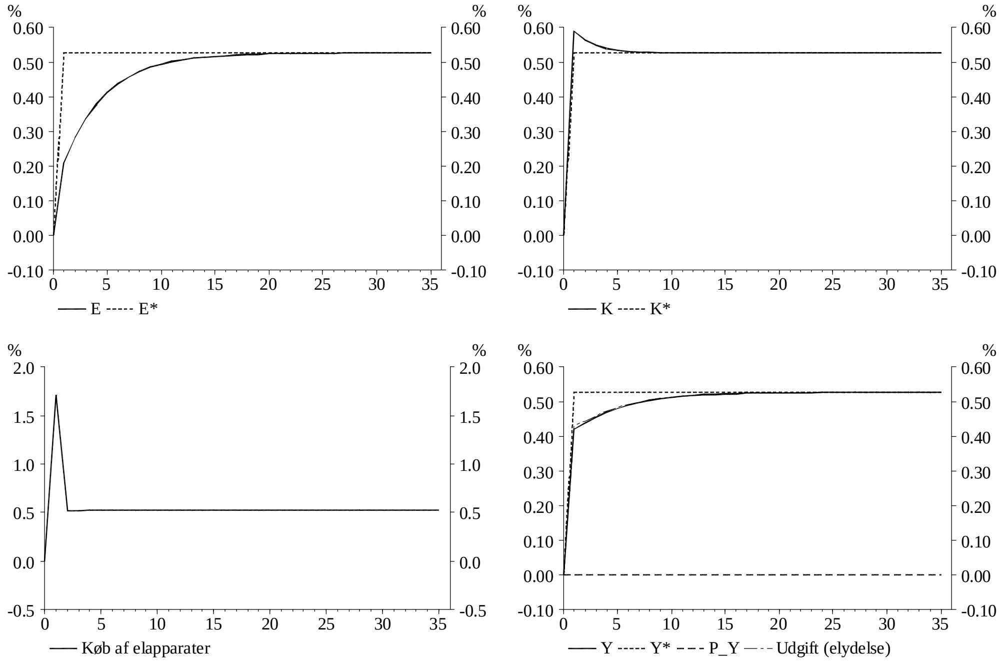
Ved en stigning i budgettet (og dermed i forbrug i faste priser) på 1% stiger E og K på lang sigt med 1%. Vi ser, at E er temmelig træg, det tager 8 år, før 90% af tilpasningen til E^* er foretaget. Der er - som følge af estimationsresultaterne - overshooting på kort sigt i K, men også K er længe om at nå det langsigtede niveau.

Køb af elapparater, I, stiger på lang sigt med 1%, da K^* stiger med 1%. Førsteårs-effekten er ganske stor, og det er forstærket af, at K overshooter på kort sigt. Investeringerne skal initialt være større end det langsigtede niveau for at kunne opbygge et større kapitalapparat.

Prisen på elydelsen, P_Y, er uændret, da hverken P_E, P_K, d_E eller d_K ændres i eksperimentet. Udgiften til elydelse følger dermed stigningen i elydelsen.

Effekten på elydelsen, Y og Y^*, kommer derfor udelukkende fra stigningen i forbruget, C. Vi ser, at der er en implicit fejlkorrektionstilpasning i Y. Det langsigtede niveau Y^* er beregnet som CES-aggregatet af E^* og K^*, og på kort sigt beregnes Y som CES-aggregatet af E og K, der begge har fejlkorrektionstilpasning. Trægheden i E 'vinder' over overshootingen i K, så der er en mere jævn tilpasning til det langsigtede niveau af elydelsen. Førsteårseffekten er i Y er på 80%, og allerede efter 7 år er 95% af tilpasningen foretaget. Den dynamiske tilpasning for Y er dermed fint fortolkelig, mens forfatteren er utilfreds med de estimerede dynamiske tilpasninger i E og K. De samme kommentarer vedrørende dynamikken i systemet gør sig gældende i de øvrige eksperimenter.

Figur C.2. Forbrugerpris + 1% (forbrug i faste priser uændret)



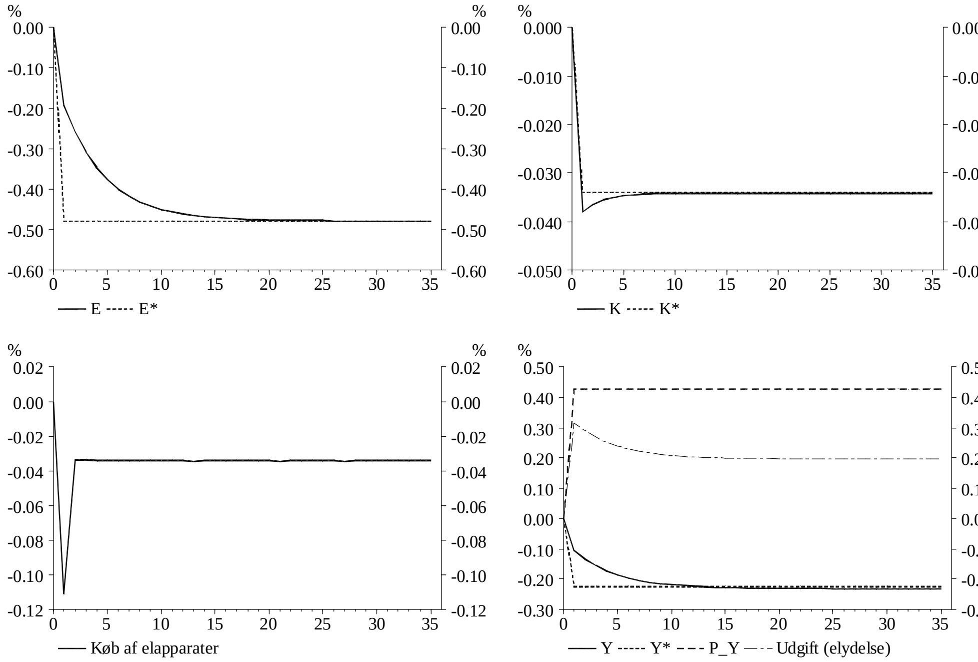
Det andet multiplikatoreksperiment af overordnet karakter er en stigning i forbrugerprisen, der er relativ prisen P_C i *Y*-efterspørgselsligningen. Elydelse bliver dermed relativt billigere, hvorfor efterspørgslen stiger.

Da *Y* udgør en ganske lille del af det samlede forbrug, (og øvrigt forbrug *X* udgør næsten hele det samlede forbrug), svarer dette eksperiment stort set til at se på en stigning i P_X på 1%, og den langsigtede effekt på *Y* er omtrent den estimerede substitutionselasticitet mellem *Y* og *X*, $\sigma_2 = 0.53$.

Prisen på elydelse er uændret, og udgiften til elydelse ændres derfor tilsvarende som elydelsen.

Den langsigtede efterspørgsel efter *E* og *K* stiger tilsvarende som den langsigtede efterspørgsel efter *Y*. Den dynamiske tilpasning (og kritikken deraf) er som beskrevet i det første multiplikatoreksperiment.

Figur C.3. **Elpris + 1%**



Det næste eksperiment er en stigning i elprisen på 1%. Priselasticiteterne for *E* og *K* på lang sigt i det samlede system er regnet analytisk ud og vist i tabel 1 og 2. Den langsigtede egenpriselasticitet på el er -0.48, (den er -0.15 i den nuværende EMMA-version, jf. DGR22702). Effekten på bestanden af elapparater er ganske beskeden, *K* falder med 0.034%, når P_E stiger med 1%. Den beskedne effekt følger af, at de to substitutionselasticiteter i systemet estimeres til at være næsten ens.

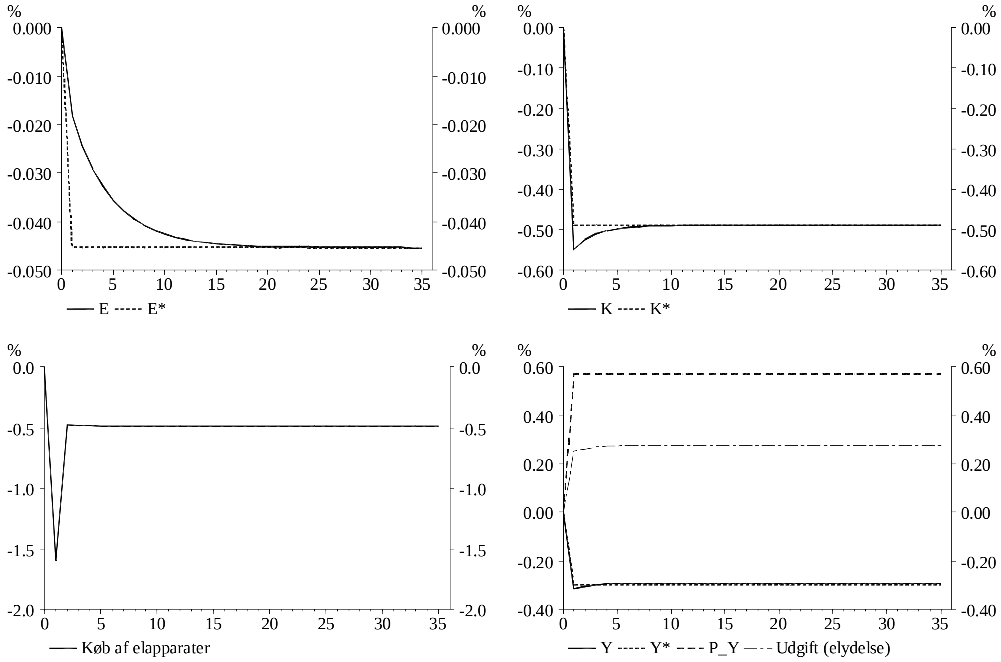
Effekterne på *E* og *K* kommer fra to kanaler, en direkte fra elprisstigningen (priselasticiteterne betinget på *Y*) og en indirekte fra faldet i elydelse (kommer fra stigning i prisen på elydelse, der stiger, når elprisen stiger). I den samlede delmodel har vi - som ønsket - at en stigning i elprisen dels sænker elforbruget, men også sænker bestanden af elapparater (godt nok kun lidt), da det nu er dyrere at bruge elapparaterne.

Køb af elapparater, *I*, falder på sigt tilsvarende med faldet i den ønskede bestand af elapparater.

Prisen på elydelse, P_Y, stiger med knapt 1/2 % som følge af, at elprisen stiger 1%. Dette bevirker et fald i elydelsen, der nu er blevet relativt dyrere sammenlignet med øvrigt forbrug.

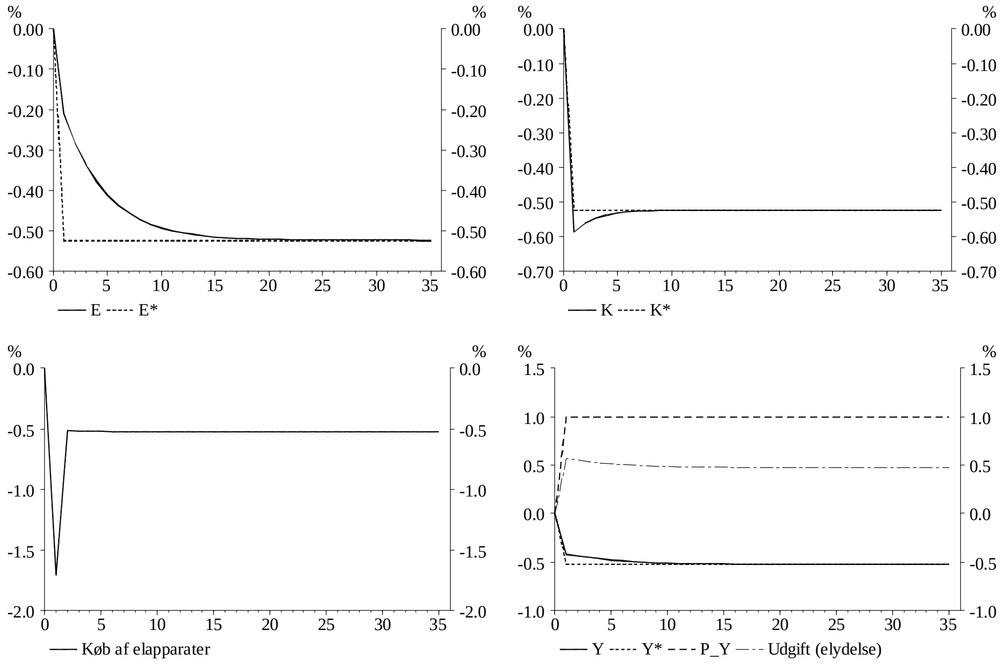
Udgiften til elydelse stiger, da P_Y stiger mere end *Y* falder, (dette vil altid være tilfældet, med mindre der er fuld substitution til øvrigt forbrug, *X*).

Figur C.4. Investeringspris + 1%



En stigning i prisen på køb af elapparater, P_I, på 1% giver en stigning i usercost på elapparatbestanden P_K på ligeledes 1%, og effekterne er tilsvarede elprisstigningen med modsat fortegn på *E* og *K*. Omkostningsandelene for *E* og *K* er omtrent 1/2, så også størrelsesordnen på effekterne er omtrent magen til elpriseksperimentet. Eneste forskel er, at der er en svag overshooting i *Y* på kort sigt.

Figur C.5. Elpris + 1% og investeringspris + 1%



I det sidste priseksperiment hæves både el- og apparatprisen med 1%, og effekterne er dermed summen af effekterne i de to foregående eksperimenter.

De langsigtede multiplikatorer for E og K kan analytisk beregnes til ! σ_2 (125), og de er ens.

$$\begin{aligned} x^*_{E,P_E} + x^*_{E,P_K} &= \left(-s_1 + s_1 S^*_E - s_2 S^*_E\right) + \left(s_1 - s_2 - s_1 S^*_E + s_2 S^*_E\right) \\ &= -s_2 = x^*_{K,P_E} + x^*_{K,P_K} \end{aligned} \tag{125}$$

I dette eksperiment kommer hele effekten på E og K fra den indirekte effekt gennem Y, for givet Y er efterspørgslen efter E og K uændret, når begge priser stiger lige meget.

$$\begin{aligned} x^*_{E,P_E|Y} + x^*_{E,P_K|Y} &= \left(-s_1\left(1 - S^*_E\right)\right) + \left(s_1\left(1 - S^*_E\right)\right) = 0 \\ &= s_1 S^*_E - s_1 S^*_E = x^*_{K,P_E|Y} + x^*_{K,P_K|Y} \end{aligned} \tag{126}$$

Prisen på elydelse, P_Y, stiger med 1%, da både P_E og P_K stiger 1%, og dermed falder efterspørgslen efter elydelse. Y's egenpriselasticitet mht. P_Y er -σ_2.[2]

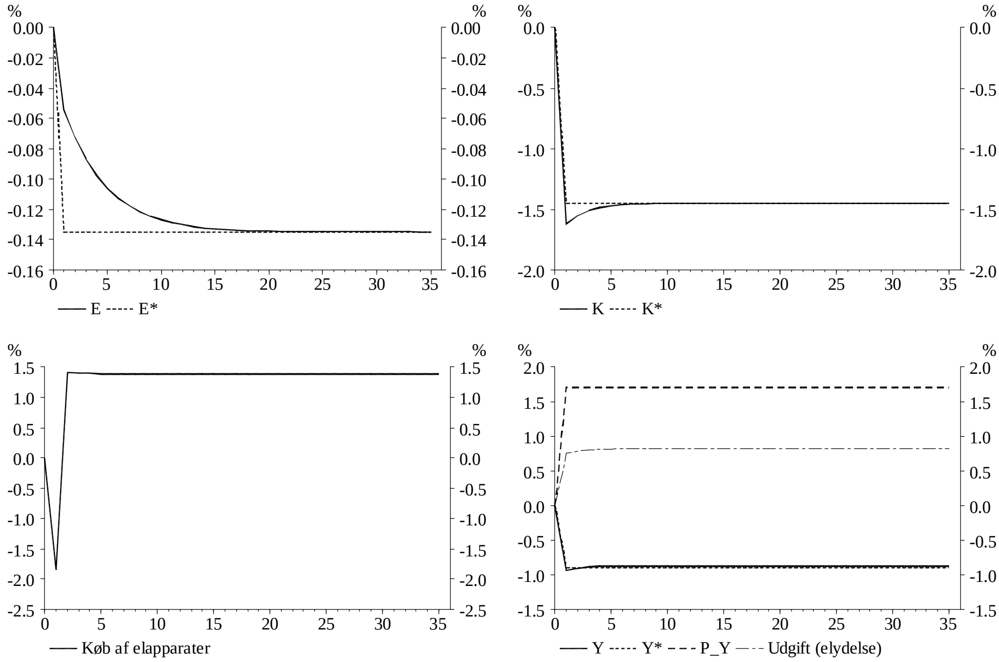
Da elydelsen falder, giver det et tilsvarende fald i E og K ('indkomsteffekt') som vist ovenfor med de analytisk beregnede totale priselasticiteter.

Udgiften til elydelse stiger med ca. 1/2%, da P_Y stiger med 1%, og Y falder med ca. 1/2%.

Da effekterne i dette eksperiment kommer fra den indirekte stigning i P_Y på 1%, er det ikke overraskende, at eksperimentet modsvarer et eksperiment med en stigning i P_X, (eksperiment 2 var en 1%-stigning i P_C, og svarer omtrent til en 1%-stigning i P_X).

[2]Hvis P_C var dannet som et CES-prisindeks over P_Y og P_X, ville der komme en lille ekstra effekt på Y's egenpriselasticitet, (samme udregning som egenpriselasticiteten af K for givet Y). Den ekstra effekt vil være lille, da elydelsens omkostningsandel er lille.

Figur C.6. Afskrivningsrate + 0.01

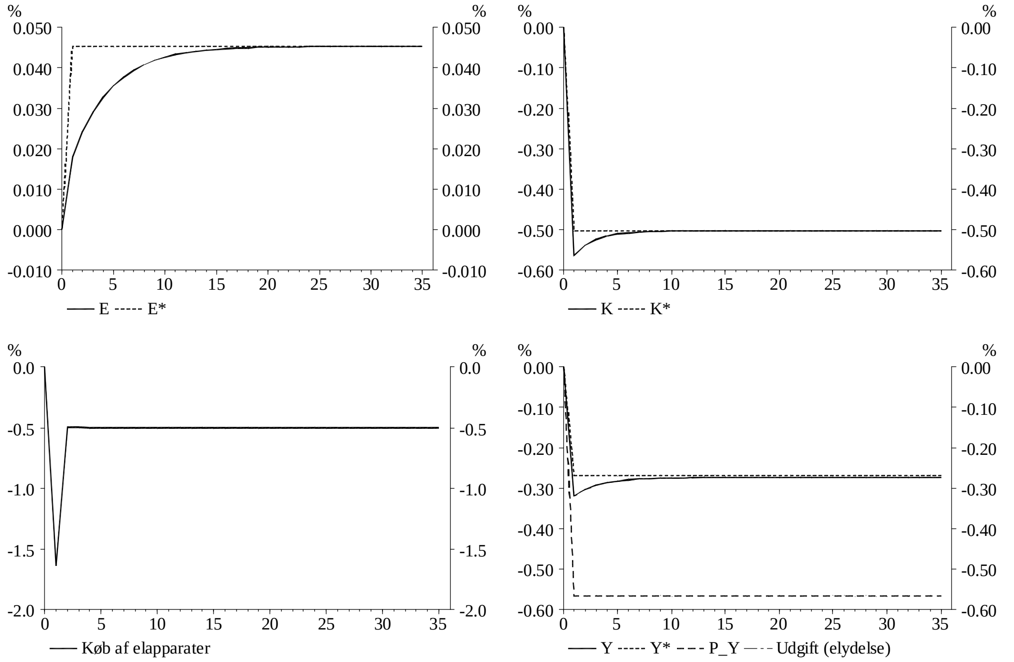


Afskrivningsraten på elapparater er en ny eksogen variabel i EMMA's delmodel for elforbrug i husholdningerne, og den kan vise sig at være et nyttigt håndtag i modellen. Vi kan fx tænke os, at øget fremkomst af nye elapparater medfører, at husholdningerne udskifter apparaterne hurtigere, (PC'ere er et eksempel derpå).

I dette eksperiment hæver vi afskrivningsraten med 0.01 fra 0.33 til 0.34, dvs. at den forventede gennemsnitlige levetid for elapparaterne falder fra 3 år til 2.9 år. Dette er en %-vis stigning i afskrivningsraten på 3%, hvorved P_K ligeledes stiger 3%. Derfor er multiplikatorerne magen til dem i tilfældet, hvor P_I og dermed P_K stiger 1%, blot er effekterne tre gange større.

Den hurtigere udskiftning af elapparaterne hæver investeringsniveauet. Investeringerne falder initialt som følge af faldet i K^*.

Figur C.7. Apparateeffektivitet + 1%



Ligesom i eksperimentet med en stigning i apparatprisen er der både en direkte effekt på efterspørgslen efter E og K og en indirekte effekt fra en ændring i Y.

Vi starter med at se på effekten på Y. Effektivitetsindekset på Y stiger med $(1 - S_E)$ som følge af stigningen i apparateffektiviteten, d_K, på 1%. Den effektivitets-korrigerede pris på Y (P_Y i figuren) falder med ca. $(1 - S_E)$, jf. approksimationen i (34), mens selve prisen på elydelse er uændret. I efterspørgselsligningen for Y^* (31) ser vi, at en stigning i d_Y på 1% giver et fald i Y^* på $(1 - \sigma_2)$, så effekten på Y^* i dette eksperiment er ca. $-(1 - \sigma_2) \cdot (1 - S_E)$, (det passer fint med effekten på 0.27% i figuren).

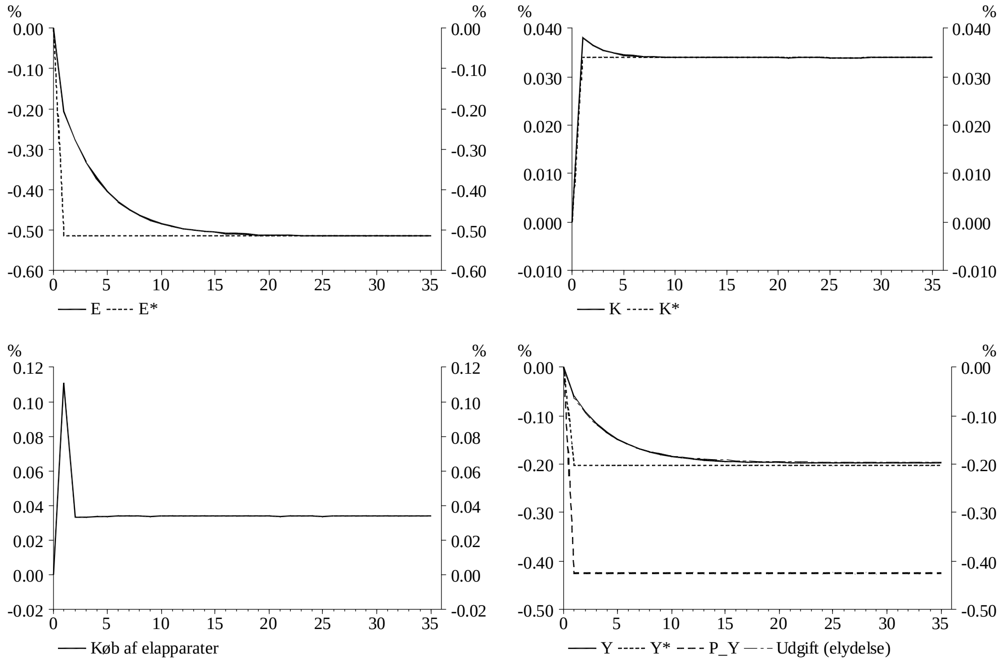
Effekten på E^* og K^* af ændringen i Y^* og d_Y er summen af deres ændringer, dvs. $-(1 - \sigma_2) \cdot (1 - S_E) + (1 - S_E) = \sigma_2 \cdot (1 - S_E) > 0$, (dette er 'indkomsteffekten').

For at finde den direkte effekt på E og K af en stigning i d_K på 1% ser vi på de analytisk udregnede effektivitetselasticiteter for fastholdt Y. Effekten på K er $-(1 - \sigma_1) - \sigma_1 \cdot (1 - S_E^*) < 0$, og effekten på E er $-\sigma_1 \cdot (1 - S_E^*) < 0$. Efterspørgslen efter K falder mest, men mindre end 1% som følge af den prisafhængige substitution over til E, nu hvor den effektivitetskorrigerede pris på K (P_K / d_K) er faldet. Efterspørgslen efter E falder, fordi relativprisen til el er faldet (P_Y stiger, når d_K falder).

Den totale effekt på K er et fald på 0.50%, og den totale effekt på E er en stigning på 0.05%, (at effekten på E ikke er større skyldes, at de to substitutionselasticiteter er omtrent ens i estimationen). De totale effekter på K og E er summen af de direkte effekter (effektivitetselasticiteterne for fastholdt Y) og de indirekte effekter gennem Y. Dette svarer til de analytisk beregnede totale effektivitetselasticiteter.

En stigning i apparateffektiviteten giver altså anledning til et fald i apparatbestanden og en beskeden stigning i elforbruget.

Figur C.8. Eleffektivitet + 1%



En stigning i eleffektiviteten har omtrent samme effekt på *Y*, og modsatrettet direkte effekt på *E* og *K*. Totalt set ser vi, at elforbruget falder med ca. 1/2%, og apparatbestanden stiger en smule, (det er nu billigere at anvende apparaterne, da de er blevet mere eleffektive, og derfor efterspørger husholdningerne flere apparater).

Bilag D. Delmodel for valg af elapparater og elforbrug

```
() elelapp.frm DGR 07.07.03

() usercost på elapparater
FRML _DJRD  pk = pca*d $

() CES-prisindeks for elydelse sammenvejer priserne på el og elapp. (effektivitetskorrigeret)
FRML _DJRD  py = ( delta1**sigma1 * (pqjec/dte)**(1-sigma1)
                  + (1-delta1)**sigma1 * (pk/dtk)**(1-sigma1) )**(1/(1-sigma1)) $

() LANGSIGTSLIGNINGER
FRML _DJRD  log(estar) = log(cp4xh/pcp4xhv)
                      + sigma1*log(delta1)
                      + sigma2*log(delta2)
                      - sigma1*log(pqjec/py)
                      - (1-sigma1)*log(dte)
                      - sigma2*log(py/pcp4xhv) $

FRML _DJRD  log(kstar) = log(cp4xh/pcp4xhv)
                      + sigma1*log(1-delta1)
                      + sigma2*log(delta2)
                      - sigma1*log(pk/py)
                      - (1-sigma1)*log(dtk)
                      - sigma2*log(py/pcp4xhv) $

() DYNAMIKKEN (simpel fejlkorrektion i E og K)
FRML _SJRD dlog(qjexvc) = a1*Dlog(estar) - a2*(log(qjexvc(-1)/estar(-1))) $
FRML _SJRD dlog(kca)    = b1*Dlog(kstar) - b2*(log(kca(-1)/kstar(-1))) $

() Køb af elapparater
FRML _DJRD fca = kca - (1-d)*kca(-1) $

() ELYDELSE

() Vægtet effektivitetsindeks
FRML _DJRD log(dty) = se*log(dte) + (1-se)*log(dtk) $

FRML _DJRD ystar = (delta1 * (estar)**((sigma1-1)/sigma1)
                  + (1-delta1) * (kstar)**((sigma1-1)/sigma1)
                  )**(sigma1/(sigma1-1)) $
FRML _DJRD y     = (delta1 * (qjexvc)**((sigma1-1)/sigma1)
                  + (1-delta1) * (kca)**((sigma1-1)/sigma1)
                  )**(sigma1/(sigma1-1)) $

() Effektivitetskorrigeret efterspørgsel langt og kort sigt
FRML _DJRD ystare = ystar*dty $
FRML _DJRD ye     = y*dty $

() Pris på elydelse - ikke effektivitetskorrigeret
FRML _DJRD py1 = py/dty $

() Udgift til elydelse
FRML _DJRD yudg1 = pqjec*qJexvc + kca*pk $
FRML _DJRD yudg2 = ye*py $
```

De indsatte parametre er:

```
 D =    0.33333
 SE =    0.43
 DELTA1 =    0.22304
 DELTA2 =    0.0052085
 SIGMA1 =    0.44768
 SIGMA2 =    0.52742
 A1 =    0.39922
 A2 =    0.22655
 B1 =    1.11937
 B2 =    0.39649
 W1E =   -0.10291
 W2E =   0.0036934
 W1K =   0.12802
 W2K =   -0.0052607
```