Danmarks Statistik
MODELGRUPPEN

Arbejdspapir*

Dorte Grinderslev
Rasmus Holm Madsen

9. september 2002

Budgetrestriktionen i transportdelmodellen - eller manglen på samme

Resumé:

I sidste øjeblik blev det afsløret, at budgetrestriktionen i transportdelmodellen (fCg og fCk) ikke altid var overholdt. Konkret dannes budgettet Cgk i modellen som fCgbk·pcgbk - pcb·fCb2, hvilket skal være (men ikke altid var) lig med fCg·pcg + fCk·pck.

Dette papir beskriver nogle problemer, der kan være med inddragelse af øvrige forklarende variabler (Kcb) og med placering af justeringsled (Jled) i langsigtssammenhængene og i de dynamiske tilpasninger. I den sidste ende ender alt godt, og den anvendte løsning præsenteres sidst i papiret.

DGR09902.WPD

Nøgleord: Budgetrestriktion, CES, Jled, benzin, kollektiv transport

1. Indledning

Kort tid før ADAM februar 2002 skulle udsendes, blev det konstateret, at budgetrestriktionen i transportdelmodellen (*fCg* og *fCk*) ikke altid var overholdt. Konkret dannes budgettet *Cgk* i modellen som *fCgbk·pcgbk - pcb·fCb2*, hvilket skal være (men ikke altid var) lig med *fCg·pcg + fCk·pck*. I dette papir gennemregnes nogle af problemstillingerne omkring sikring af overholdelse af budgetrestriktionen, og den valgte løsning dokumenteres. En del af overvejelserne gælder i midlertidig generelt i udgiftssystemer.

Transportdelmodellen er dokumenteret i RHM25102 og RHM29502, hvortil der henvises angående idéerne bag modellen og modellens egenskaber.

Først opsummeres transportdelmodellen udledt fra en CES-nyttefunktion med en budgetrestriktion i afsnit 2. Afsnit 3 gennemgår nogle tilfælde, hvor det *ikke* automatisk er sikkert, at budgetrestriktionen er overholdt. Endelig afprøves to løsningsforslag i afsnit 4, og den endelige modelformulering afsløres.

2. Transport-delmodellen

Langsigtsefterspørgsel

Langsigtsefterspørgselsligningerne for benzin (*fCg*, herefter *G*) og kollektiv transport (*fCk*, herefter *K*) er udledt fra en CES-nyttefunktion med en budgetrestriktion (her opskrevet i den mest simple form uden trende eller andre forklarende variabler). I RHM25102 og RHM29502 bliver mellemregningerne sprunget over, så det råder vi bod på her. *C* er budgettet (*Cgk*), σ er substitutionselasticiteten, δ_1 og δ_2 er CES-skaleringsparametre.

$$\begin{aligned} \max_{G,K} U &= \left[\delta_1 \cdot G^{\frac{\sigma-1}{\sigma}} + \delta_2 \cdot K^{\frac{\sigma-1}{\sigma}}\right]^{\frac{\sigma}{\sigma-1}} \\ st.\ C &= G \cdot P_G + K \cdot P_K \end{aligned} \tag{1}$$

Vi løser nyttemaksimeringsproblemet med Lagrange-optimering.

$$\mathcal{L}(G,K) = \left[\delta_1 \cdot G^{\frac{\sigma-1}{\sigma}} + \delta_2 \cdot K^{\frac{\sigma-1}{\sigma}}\right]^{\frac{\sigma}{\sigma-1}} - \lambda \cdot \left[C - G \cdot P_G - K \cdot P_K\right] \tag{2}$$

Hvor førsteordensbetingelserne for G er (og tilsvarende for K)

$$\begin{aligned} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial G} &= \lambda \cdot P_G + \frac{\sigma}{\sigma-1}\left[\delta_1 \cdot G^{\frac{\sigma-1}{\sigma}} + \delta_2 \cdot K^{\frac{\sigma-1}{\sigma}}\right]^{\left(\frac{\sigma}{\sigma-1}-1\right)} \cdot \delta_1 \cdot \frac{\sigma-1}{\sigma} \cdot G^{\left(\frac{\sigma-1}{\sigma}-1\right)} \\ &= \lambda \cdot P_G + \delta_1 \cdot G^{-\frac{1}{\sigma}} \cdot \left[\delta_1 \cdot G^{\frac{\sigma-1}{\sigma}} + \delta_2 \cdot K^{\frac{\sigma-1}{\sigma}}\right]^{\frac{1}{\sigma-1}} \end{aligned} \tag{3}$$

Hvis vi dividerer førsteordensbetingelsene med hinanden, fås en sammenhæng mellem prisforholdet og forholdet mellem efterspørgslerne.

$$\frac{P_G}{P_K} = \frac{\delta_1}{\delta_2}\cdot\left(\frac{G}{K}\right)^{-\frac{1}{\sigma}} \Leftrightarrow \frac{G}{K} = \left(\frac{\delta_1}{\delta_2}\right)^{\sigma}\cdot\left(\frac{P_G}{P_K}\right)^{-\sigma} \Leftrightarrow K = G\cdot\left(\frac{\delta_2}{\delta_1}\right)^{\sigma}\cdot\left(\frac{P_K}{P_G}\right)^{-\sigma} \qquad (4)$$

Formlen for *K* indsættes nu i budgetrestriktionen, hvorved der fremkommer en efterspørgselsfunktion for *G*.

$$\begin{aligned}
C &= G\cdot P_G + K\cdot P_K = G\cdot P_G + G\cdot\left(\frac{\delta_2}{\delta_1}\right)^{\sigma}\cdot\left(\frac{P_K}{P_G}\right)^{-\sigma}\cdot P_K \\
&= G\cdot\left[P_G + \left(\frac{\delta_2}{\delta_1}\right)^{\sigma}\cdot\left(\frac{1}{P_G}\right)^{-\sigma}\cdot P_K^{1-\sigma}\right] \qquad \Leftrightarrow \\
G &= C\cdot\left[P_G + \left(\frac{\delta_2}{\delta_1}\right)^{\sigma}\cdot\left(\frac{1}{P_G}\right)^{-\sigma}\cdot P_K^{1-\sigma}\right]^{-1} \qquad (5) \\
&= C\cdot\delta_1^{\sigma}\cdot P_G^{-\sigma}\cdot\left[\delta_1^{\sigma}\cdot P_G^{1-\sigma} + \delta_2^{\sigma}\cdot P_K^{1-\sigma}\right]^{-1} = C\cdot\delta_1^{\sigma}\cdot P_G^{-\sigma}\cdot P_{CES}^{\sigma-1} \\
&= \frac{C}{P_{CES}}\cdot\delta_1^{\sigma}\cdot\left(\frac{P_G}{P_{CES}}\right)^{-\sigma} \\
\text{med } P_{CES} &= \left[\delta_1^{\sigma}\cdot P_G^{1-\sigma} + \delta_2^{\sigma}\cdot P_K^{1-\sigma}\right]^{\frac{1}{1-\sigma}}
\end{aligned}$$

Efterspørgselsligningen for *K* bliver tilsvarende, (disse to betegnes herefter G^* og K^*).[1]

$$K = C\cdot\left[P_K + \left(\frac{\delta_1}{\delta_2}\right)^{\sigma}\cdot\left(\frac{1}{P_K}\right)^{-\sigma}\cdot P_G^{1-\sigma}\right]^{-1} = \frac{C}{P_{CES}}\cdot\delta_2^{\sigma}\cdot\left(\frac{P_K}{P_{CES}}\right)^{-\sigma} \qquad (6)$$

Budgetrestriktion, lang sigt

Da efterspørgselsfunktionerne er udledt ud fra budgetrestriktionen, er det oplagt, at den er overholdt, men vi skriver alligevel udregningen op, (der efterviser dette), da den skal bruges senere.[2]

[1] Af de første formuleringer af G^* og K^*, (hvor CES-prisindekset ikke er substitueret ud af efterspørgselsligningerne), ses det, hvorfor det ikke var muligt at estimere skaleringsparametrene δ_1 og δ_2 frit, idet kun forholdet mellem disse indgår i de to ligninger. I estimationen er anvendt den normerende restriktion $\delta_1+\delta_2=1$.

[2] NB. Udregningen gælder uafhængigt af, om der er restriktion på konstantleddene, fx $\delta_1+\delta_2=1$.

$$
\begin{aligned}
C &= P_G \cdot G^* + P_K \cdot K^* = P_G \cdot \frac{C}{P_{CES}} \cdot \delta_1^\sigma \cdot \left(\frac{P_G}{P_{CES}} \right)^{-\sigma} + P_K \cdot \frac{C}{P_{CES}} \cdot \delta_2^\sigma \cdot \left(\frac{P_K}{P_{CES}} \right)^{-\sigma} \\
&= C \cdot P_{CES}^{\sigma-1} \cdot \left[\delta_1^\sigma \cdot P_G^{1-\sigma} + \delta_2^\sigma \cdot P_K^{1-\sigma} \right] = C \cdot P_{CES}^{\sigma-1} \cdot P_{CES}^{1-\sigma} \\
&= C
\end{aligned} \tag{7}
$$

I modellen er efterspørgselsligningerne tilsat effektivitetsindeks (se senere).

Efterspørgsel, kort sigt (dynamisk tilpasning)

Den dynamiske tilpasning foretages med fejlkorrektionsligninger, dvs. 2. generations dynamik. Ændringen i bilparken, Dlog(Kcb), er medtaget som en ekstra forklarende variabel på kort sigt, (bemærk at det kun er parameteren (κ) til Dlog(Kcb), der er forskellig i ligningen for G og K). Endelig er alle ligningerne krydret med diverse justeringsled og eksogeniseringsmuligheder.

$$
\begin{aligned}
\text{Dlog}(G) &= \text{Dlog}(C) + \kappa_G \cdot \text{Dlog}(Kcb) - \beta \cdot \text{Dlog}\left(\frac{P_G}{P_{CES}} \right) \\
&\quad - \gamma \cdot \left[\log(G_{-1}) - \log(G_{-1}^*) \right]
\end{aligned} \tag{8}
$$

I nedenstående formelboks 1 er gengivet modelligningerne i transportdelmodellen, inden der blev foretages rettelser.

Formelboks 1. Modelligninger i RHM29502

```
FRML _GJRD   Cgk         = fCgbk*pcgbk - pcb*fCb2 $
FRML _D__D   pcgk        = ( ((0.382311)**0.604368)*(pcg/dtfcg)**(1-0.604368)
                              +((1-0.382311)**0.604368)*(pck/dtfck)**(1-0.604368) )
                             **(1/(1-0.604368)) $
FRML _SJRD   log(fCgw)   = log(Cgk/pcgk) - 0.604368*log(pcg/pcgk)
                            - (1-0.604368)*log(dtfcg)
                            + 0.604368*log(0.382311) $
FRML _SJRD   Dlog(fCg)   = Dlog(Cgk/pcgk) - 0.256071*Dlog(pcg/pcgk)
                            + 0.330319*(1-0.604368)*Dlog(dtfcg) + .8*Dlog(Kcb)
                            + 0.330319*(-log(fCg(-1)) + log(fCgw(-1))) $
FRML _SJRD   log(fCkw)   = log(Cgk/pcgk) - 0.604368*log(pck/pcgk)
                            - (1-0.604368)*log(dtfck) + 0.604368*log(1-0.382311) $
FRML _SJRD   Dlog(fCk)   = Dlog(Cgk/pcgk) - 0.256071*Dlog(pck/pcgk)
                            + 0.330319*(1-0.604368)*Dlog(dtfck)
                            + 0.330319*(-log(fCk(-1)) + log(fCkw(-1)))
                            - 0.551699*Dlog(Kcb) $
```

3. Problemer med overholdelse af budgetrestriktionen

Det, vi i modelsammenhæng er interesseret i, er, at budgetrestriktionen er overholdt, dvs. $C = G{\cdot}P_G + K{\cdot}P_K$, dette betegner vi i papiret som 'den kortsigtede budgetrestriktion'. I modellen bestemmes de langsigtede efterspørgsler efter benzin og kollektiv transport, G^* og K^*, hvortil de faktiske efterspørgsler tilpasser sig over tid. Derfor ser vi først på overholdelse af 'den langsigtede budgetrestriktion' $C = G^*{\cdot}P_G + K^*{\cdot}P_K$. Denne bør være overholdt både af teoretisk årsager og for at sikre de dynamiske egenskaber, når efterspørgslen tilpasses til langsigts niveauerne.

3.1. Trende i langsigtsrelationerne

Vi indsætter effektivitetskorrigerede mængder og priser i efterspørgselsfunktionerne (og i CES-prisindekset). Fx for G: $G{\cdot}e_G$ og P_G/e_G.[3]

$$\begin{aligned} G^* &= C{\cdot}\delta_1^{\sigma}{\cdot}P_G^{-\sigma}{\cdot}P_{CES}^{\sigma-1}{\cdot}e_G^{\sigma-1} \\ P_{CES} &= \left[\delta_1^{\sigma}{\cdot}\left(P_G/e_G\right)^{1-\sigma} + \delta_2^{\sigma}{\cdot}\left(P_K/e_K\right)^{1-\sigma}\right]^{\frac{1}{1-\sigma}} = \left[\delta_1^{\sigma}{\cdot}e_G^{\sigma-1}{\cdot}P_G^{1-\sigma} + \delta_2^{\sigma}{\cdot}e_K^{\sigma-1}{\cdot}P_K^{1-\sigma}\right]^{\frac{1}{1-\sigma}} \end{aligned} \tag{9}$$

Bemærk, at de faktiske omkostninger pr. konstruktion er uændret.

$$C = \left(P_G/e_G\right){\cdot}\left(G{\cdot}e_G\right) + \left(P_K/e_K\right){\cdot}\left(K{\cdot}e_K\right) = P_G{\cdot}G + P_K{\cdot}K = C \tag{10}$$

Det vises nemt, at budgetrestriktionen (som ventet) stadig er overholdt.

$$C = G^*{\cdot}P_G + K^*{\cdot}P_K = C{\cdot}P_{CES}^{\sigma-1}{\cdot}\left[\delta_1^{\sigma}{\cdot}P_G^{1-\sigma}{\cdot}e_G^{\sigma-1} + \delta_2^{\sigma}{\cdot}P_K^{1-\sigma}{\cdot}e_K^{\sigma-1}\right] = C \tag{11}$$

3.2. Justeringsled i langsigtsrelationerne

Vi vil gerne have muligheden for at justere niveauerne for de langsigtede efterspørgsler, fx så G ganges med en faktor J_G^*, og K ganges med en faktor J_K^* (i ADAM-terminologi: et JR-led). Her anviser vi, hvordan det skal indgå i ligningerne, for at budgetrestriktionen fortsat er overholdt.

Først prøver vi blot at indsætte $G^*{\cdot}J_G^*$ og $K^*{\cdot}J_K^*$ i stedet for G^* og K^* og betragte budgetrestriktionen, (det er denne måde automatisk PCIM-genererede JR-led indgår i efterspørgselsligningerne).

$$\begin{aligned} C &= P_G{\cdot}G^*{\cdot}J_G^* + P_K{\cdot}K^*{\cdot}J_K^* \\ &= C{\cdot}P_{CES}^{\sigma-1}{\cdot}\left[J_G^*{\cdot}\delta_1^{\sigma}{\cdot}P_G^{1-\sigma} + J_K^*{\cdot}\delta_2^{\sigma}{\cdot}P_K^{1-\sigma}\right] \end{aligned} \tag{12}$$

[3] Principielt burde vi betegne G^* med en tilde el.lign. for at vise, at det er en 'ny' efterspørgselsfunktion, men det droppes indtil videre i resten af teksten.

Hvis anden linje skal kollapse til C, skal følgende ligning være opfyldt.

$$J_G^{*}\cdot\delta_1^{\sigma}\cdot P_G^{1-\sigma}+J_K^{*}\cdot\delta_2^{\sigma}\cdot P_K^{1-\sigma} \;=\; \delta_1^{\sigma}\cdot P_G^{1-\sigma}+\delta_2^{\sigma}\cdot P_K^{1-\sigma} \tag{13}$$

Hvilket (så vidt jeg kan se) kun er tilfældet med $J_G^* = J_K^* = 1$, dvs. ingen niveaukorrektioner!

Vi prøver i stedet at indføre niveaukorrektionen parallelt med konstantleddene, δ. Dermed foreslås CES-prisindekset givet ved

$$P_{CES} \;=\; \left[J_G^{*}\cdot\delta_1^{\sigma}\cdot P_G^{1-\sigma}+J_K^{*}\cdot\delta_2^{\sigma}\cdot P_K^{1-\sigma}\right]^{\frac{1}{1-\sigma}} \tag{14}$$

Når vi denne gang regner på budgetbetingelsen, indses det, at den er overholdt.

$$\begin{aligned} C \;&=\; P_G\cdot G^{*}\cdot J_G^{*}+P_K\cdot K^{*}\cdot J_K^{*} \\ &=\; C\cdot P_{CES}^{\sigma-1}\cdot\left[J_G^{*}\cdot\delta_1^{\sigma}\cdot P_G^{1-\sigma}+J_K^{*}\cdot\delta_2^{\sigma}\cdot P_K^{1-\sigma}\right] \\ &=\; C\cdot P_{CES}^{\sigma-1}\cdot P_{CES}^{1-\sigma} \;=\; C \end{aligned} \tag{15}$$

Lad os lige til slut skrive efterspørgslen efter G^* helt ud ved at indsætte CES-prisindekset, hvorved vi kan se, at det er *forholdet* mellem justeringsleddene, der indgår, (det er netop derfor, der ikke fremkommer en restriktion mellem de to justeringsled). Efterspørgselsligningen er den sædvanlige CES-ligning, pånær at prisforholdet er ganget med forholdet mellem justeringsleddene.

$$\begin{aligned} G^{*} \;&=\; C\cdot\delta_1^{\sigma}\cdot P_G^{-\sigma}\cdot P_{CES}^{\sigma-1}\cdot J_G^{*} \\ &=\; C\cdot\delta_1^{\sigma}\cdot P_G^{-\sigma}\cdot J_G^{*}\cdot\left[J_G^{*}\cdot\delta_1^{\sigma}\cdot P_G^{1-\sigma}+J_K^{*}\cdot\delta_2^{\sigma}\cdot P_K^{1-\sigma}\right]^{-1} \\ &=\; C\cdot\delta_1^{\sigma}\cdot P_G^{-\sigma}\cdot\left[\delta_1^{\sigma}\cdot P_G^{1-\sigma}+\frac{J_K^{*}}{J_G^{*}}\cdot\delta_2^{\sigma}\cdot P_K^{1-\sigma}\right]^{-1} \\ &=\; C\cdot\left[1+\left(\frac{\delta_2}{\delta_1}\right)^{\sigma}\cdot\left(\frac{P_K}{P_G}\right)^{1-\sigma}\cdot\frac{J_K^{*}}{J_G^{*}}\right]^{-1} \end{aligned} \tag{16}$$

Dette er forsøgt indsat i modellen (se nedenstående formelboks 2) og fungerer efter hensigten i langsigtsrelationerne, men i tilfældet med dynamisk 2. generations tilpasning til langsigtsniveauerne (som her i transportdelmodellen) vil et stød til et af (eller begge) 'langsigts-J-leddene' bryde budgetrestriktionen på kort sigt pga. ændringen i P_{CES}.[4]

[4] Her er ligningerne opskrevet *uden* Dlog(*Kcb*) i kortsigtsrelationerne, da dette ellers også giver problemer med overholdelse af budgetrestriktionen.

Formelboks 2. Implementering af nye Jled i langsigtsrelationerne

```
() ej Dlog(kcb)
() ny J-ledformulering i langsigt

FRML _D__D   pcgk      = ( (1+JRfcgw)*((0.382311)**0.604368)*(pcg/dtfcg)**(1-0.604368)
                          +(1+JRfckw)*((1-0.382311)**0.604368)*(pck/dtfck)**(1-0.604368) )
                          **(1/(1-0.604368)) $
FRML _D___   fCgw   = EXP( log(Cgk/pcgk) - 0.604368*log(pcg/pcgk)
                         - (1-0.604368)*log(dtfcg)
                         + 0.604368*log(0.382311) )
                     *(1+JRfcgw) $
FRML _SJRD   Dlog(fCg)   = Dlog(Cgk/pcgk) - 0.256071*Dlog(pcg/pcgk)
                         + 0.330319*(1-0.604368)*Dlog(dtfcg) + .0*Dlog(Kcb)
                         + 0.330319*(-log(fCg(-1)) + log(fCgw(-1))) $
FRML _D___   fCkw   = EXP( log(Cgk/pcgk) - 0.604368*log(pck/pcgk)
                         - (1-0.604368)*log(dtfck) + 0.604368*log(1-0.382311) )
                     *(1+JRfckw)  $
FRML _SJRD   Dlog(fCk)   = Dlog(Cgk/pcgk) - 0.256071*Dlog(pck/pcgk)
                         + 0.330319*(1-0.604368)*Dlog(dtfck)
                         + 0.330319*(-log(fCk(-1)) + log(fCkw(-1))) $
()                       - 0.551699*Dlog(Kcb)
```

3.3. Øvrige forklarende variabler i langsigtsrelationerne

Vi ser nu på tilfældet med en ekstra forklarende variabel, *B* (tænk på bilparken *Kcb*), i langsigtsligningerne. Der tillades forskellige effekt på hhv. *fCg* og *fCk* (parametrene β_1 og β_2). Vi går frem ligesom i tilfældet med justeringsled.

$$\begin{aligned} C &= P_G \cdot G^* \cdot B^{\beta_1} + P_K \cdot K^* \cdot B^{\beta_2} \\ &= C \cdot P_{CES}^{\sigma-1} \cdot \left[B^{\beta_1} \cdot \delta_1^{\sigma} \cdot P_G^{1-\sigma} + B^{\beta_2} \cdot \delta_2^{\sigma} \cdot P_K^{1-\sigma} \right] \end{aligned} \tag{17}$$

Budgetrestriktionen er dermed kun automatisk opfyldt, hvis følgende ligning er opfyldt for alle værdier af B, P_G og P_K, men det er ikke umiddelbart muligt at identificere en restriktion på de nye parametre β_1 og β_2, der kan sikre dette.

$$B^{\beta_1} \cdot \delta_1^{\sigma} \cdot P_G^{1-\sigma} + B^{\beta_2} \cdot \delta_2^{\sigma} \cdot P_K^{1-\sigma} = \delta_1^{\sigma} \cdot P_G^{1-\sigma} + \delta_2^{\sigma} \cdot P_K^{1-\sigma} \tag{18}$$

Ligesom i justeringsledstilfældet indføres den ekstra variabel *B* derfor i CES-prisindekset, hvorved det sikres, at budgetrestriktionen er overholdt. Bemærk, at øvrige forklarende variabler dermed skal indgå i efterspørgselssystemet parallelt med effektivitetsindeksene, og at de også vil have en kortsigtseffekt gennem CES-prisindekset.

$$P_{CES} = \left[B^{\beta_1} \cdot \delta_1^{\sigma} \cdot P_G^{1-\sigma} + B^{\beta_2} \cdot \delta_2^{\sigma} \cdot P_K^{1-\sigma} \right]^{\frac{1}{1-\sigma}} \tag{19}$$

I ligning (20) er opskrevet efterspørgslen efter G^*. Det kan bemærkes, at det næppe vil være muligt at estimere begge de nye parametre frit, idet kun forholdet mellem disse indgår i de fuldt udskrevne efterspørgselsligninger, hvor CES-prisindekset er indsubstitueret. Derfor kan vi fx vælge restriktionen $\beta_1+\beta_2 = 1$ tilsvarende som for konstantleddene.

$$G^{*} = C \cdot \delta_1^{\sigma} \cdot P_G^{-\sigma} \cdot P_{CES}^{\sigma-1} \cdot B^{\beta_1} = C \cdot \left[1 + \left(\frac{\delta_2}{\delta_1} \right)^{\sigma} \cdot \left(\frac{P_K}{P_G} \right)^{1-\sigma} \cdot B^{(\beta_2 - \beta_1)} \right]^{-1} \tag{20}$$

3.4. Anden relativ-pris (fx et Törnqvist-prisindeks)

Undervejs i opstillingen af transportdelmodellen blev det overvejet at erstatte det teoretisk korrekte CES-prisindeks, P_{CES}, med et Törnqvist-prisindeks, P_T, (enten kæde- eller fast base), se RHM25102, men hvis et sådant alternativt prisindeks anvendes, sikres det *ikke*, at budgetrestriktionen er overholdt.

$$G^{*} = C \cdot \delta_1^{\sigma} \cdot P_G^{-\sigma} \cdot P_T^{\sigma-1} \tag{21}$$

$$\begin{aligned} C &= P_G \cdot G^{*} + P_K \cdot K^{*} = C \cdot P_T^{\sigma-1} \cdot \left[\delta_1^{\sigma} \cdot P_G^{1-\sigma} + \delta_2^{\sigma} \cdot P_K^{1-\sigma} \right] \\ &= C \cdot P_T^{\sigma-1} \cdot P_{CES}^{1-\sigma} \end{aligned} \tag{22}$$

Det skal dog understreges, at der ingen problemer er, hvis Törnqvist-prsindekset er en meget god approksimation til CES-prisindekset, idet de to prisindeks da vil gå ud med hinanden i (22).[5]

3.5. Efterspørgsel på kort sigt

Det er ikke lige så nemt at regne på overholdelse af budgetrestriktionen på kort sigt i dette tilfælde med 2. generations dynamik, men modeleksperimenter viser, at det er problematisk for budgetrestriktionen at inddrage øvrige forklarende variabler og justeringsled på kort sigt.

Som beskrevet i RHM29502 har det været nødvendigt (for at sikre rimelige modelegenskaber), at binde parameteren til Dlog(*Kcb*) i *fCg*-ligningen helt op til 0.8, derved estimeres parameteren til Dlog(*Kcb*) i *fCk*-ligningen til -0.551699, (hvilket er en del større end i en fri estimation). Det er - uden held - forsøgt at justere på den sidste parameter for at se, om det var muligt implicit at bestemme en restriktion mellem parametrene til Dlog(*Kcb*) i de to ligninger, der sikrer overholdelse af budgetrestriktionen.

---

[5]Hvis det kun er af estimationstekniske årsager, at der estimeres med et Törnqvist-prisindeks i stedet for CES-prisindekset, kan det blot vælges i modellen at opskrive CES-prsindekset i stedet (evt. passende normeret), hvorved det er sikret, at budgetrestriktionen er overholdt.

Hvis der i stedet anvendes 3. generations dynamik, hvor den ene faktor er træg, og den anden på kort sigt over-shooter for at sikre overholdelse af (i dette tilfælde) budgetrestriktionen også på kort sigt,[6] er det nemmere at regne på overholdelse af budgetrestriktionen på kort sigt, når der indarbejdes øvrige forklarende variabler og justeringsled, men det er ikke forsøgt i dette papir.

4. Løsningsforslag

Da de ovenstående betragtninger viser, at det ikke er lige til at indlægge øvrige forklarende variabler og justeringsled i efterspørgselsligningerne i et udgiftsystem med 2. generations dynamik, således at budgetrestriktionen fortsat automatisk er overholdt, ses i dette afsnit på en mere høker-agtig tilgang til problemstillingen.

To skitser er undersøgt i forsøget på at løse problemet med den manglende overholdelse af budgetrestriktionen i transportdelmodellen.

4.1. Skitse 1

Den første løsningsskitse går ud på at bibeholde de estimerede ligninger for *fCg* og *fCk*. Disse skal dog kun fastlægge forholdet mellem *fCg* og *fCk*. Efterfølgende bliver der så opregnet til niveauer, så *Cgk* stemmer. Formlerne for transport-delmodellen bliver så som i formelboks 3. Her bestemmer ligningerne for *fCg1* og *fCk1* forholdet mellem benzinforbruget og kollektiv transport, mens ligningerne for *fCg* og *fCk* sikrer, at budgetrestriktionen holdes.

Formelboks 3. Løsningsskitse 1

```
FRML _GJRD   Cgk         = fCgbk*pcgbk - pcb*fCb2 $
FRML _D__D   pcgk        = ( ((0.382311)**0.604368)*(pcg/dtfcg)**(1-0.604368)
                            +((1-0.382311)**0.604368)*(pck/dtfck)**(1-0.604368) )
                           **(1/(1-0.604368)) $
FRML _SJRD   log(fCgw)   = log(Cgk/pcgk) - 0.604368*log(pcg/pcgk)
                          - (1-0.604368)*log(dtfcg)
                          + 0.604368*log(0.382311) $
FRML _SJRD   Dlog(fCg1)  = Dlog(Cgk/pcgk) - 0.256071*Dlog(pcg/pcgk)
                          + 0.330319*(1-0.604368)*Dlog(dtfcg) + .8*Dlog(Kcb)
                          + 0.330319*(-log(fCg1(-1)) + log(fCgw(-1))) $
FRML _SJRD   log(fCkw)   = log(Cgk/pcgk) - 0.604368*log(pck/pcgk)
                          - (1-0.604368)*log(dtfck) + 0.604368*log(1-0.382311) $
FRML _SJRD   Dlog(fCk1)  = Dlog(Cgk/pcgk) - 0.256071*Dlog(pck/pcgk)
                          + 0.330319*(1-0.604368)*Dlog(dtfck)
                          - 0.551699*Dlog(Kcb)
                          + 0.330319*(-log(fCk1(-1)) + log(fCkw(-1))) $
() Opregning til niveauer
FRML _D      fCg = fCg1*Cgk/(pcg*fCg1+pck*fCk1) $
FRML _D      fCk = fCk1*Cgk/(pcg*fCg1+pck*fCk1) $
```

Der er dog i hvert fald én ulempe ved denne løsningsskitse, nemlig, at det bliver svært at eksogenisere *fCg* hhv. *fCk*. Forestiller vi os, at vi gerne vil eksogenisere benzinforbruget (*fCg*), så er det ikke så ligetil. Eksogeniseres eksempelvis *fCg1* vil *fCg* ikke automatisk antage netop dette niveau.

[6] Se dokumentation af ADAM's faktorefterspørgsel for en beskrivelse af begreberne 2. og 3. generations dynamik.

4.2. Skitse 2

Vi har derfor også set på en alternativ løsningsskitse. Denne løsningsskitse går ud på at estimere *fCg* og *fCk* som hidtil, men kun opskrive estimationen af den ene i formelfilen. Den anden bliver så residualbestemt. Hvis vi eksempelvis fastholder ligningen for *fCg*, så kan *fCk* residualbestemmes ud fra *Cgk* og *fCg*, jvf. formelboks 4.

Formelboks 4. Løsningsskitse 2

```
FRML _GJRD   Cgk         = fCgbk*pcgbk-pcb*fCb2 $
FRML _D__D   pcgk        = (  ((0.382311)**0.604368)*(pcg/dtfcg)**(1-0.604368)
                             +((1-0.382311)**0.604368)*(pck/dtfck)**(1-0.604368))
                             **(1/(1-0.604368)) $
FRML _SJRD   log(fCgw)   = log(Cgk/pcgk) - 0.604368*log(pcg/pcgk)
                            - (1-0.604368)*log(dtfcg) + 0.604368*log(0.382311) $
FRML _SJRD   Dlog(fCg)   = Dlog(Cgk/pcgk) - 0.256071*Dlog(pcg/pcgk)
                           + 0.330319*(1-0.604368)*Dlog(dtfcg)
                           + .8*Dlog(Kcb)
                           + 0.330319*(-log(fCg(-1)) + log(fCgw(-1))) $
FRML _I      fCk         = (Cgk - pcg*fCg)/pck $
```

Opskrivningen i modellen ligner dermed meget det, vi hidtidig har haft i modellen (bl.a. i ADAM, version April 2000, jf. nedenstående formelboks 5). Vi kan dog stadig ikke eksogenisere *fCk* direkte, men det kunne vi på den anden side heller ikke i Apr00-modellen.[7]

Formelboks 5. *fCg* og *fCk* i April 2000

```
() APR00
FRML _SJ_D   log(fCgw)   = - 0.69190*log(pcg/pcp4v) + 0.86444*log(Kcb)
                            - (1-0.69190)*log(dtfcg) + 3.26943 $
FRML _SJRD   Dlog(fCg)   = - 0.46273*Dlog(pcg/pcp4v)
                            - 0.70292*(log(fCg(-1)) - log(fCgw(-1))) $
FRML _I      fCk         = (fCgbk*pcgbk-pcg*fCg-pcb*fCb2)/pck $
```

Egenskaberne i den nye transportmodel bliver dog bibeholdt, selvom løsningsskitse 2 implementeres, herunder substitutionen mellem benzin og kollektiv transport. Mht. modellens egenskaber er der ikke forskel på at implementere den i formelboks 4 foreslåede skitse i stedet for den transportdelmodel, der ligger i den foreløbige version af Feb02-modellen (formelboks 1).

Til den nye modelversion (Februar 2002) har vi valgt at implementere løsningsskitse 2.

[7] *fCk* kan indirekte eksogeniseres ved at eksogenisere både den samlede transportefterspørgsel i DLU, *fCgbk*, og benzinefterspørgslen, *fCg*.

5. Konklusion

Når vi ser på automatisk overholdelse af budgetrestriktionen i et CES-udgifts-system med 2. generations dynamik, er der følgende konklusioner:

- Det er uproblematisk, (men ikke ukompliceret), at
  - inddrage trende i efterspørgselsligningerne
  - inddrage øvrige forklarende variabler i langsigtsligningerne

- Det giver udfordringer, at
  - indlægge justeringsled i efterspørgselsligningerne, både langsigts og kortsigts
  - inddrage øvrige forklarende variabler i kortsigtsligningerne
  - anvende et alternativt prisindeks fremfor det korrekte CES-prisindeks

Læren heraf er, at i et udgiftssystem er det vigtigt at være påpasselig med, hvorledes øvrige forklarende variabler og justeringsled indlægges i modellen, specielt i tilfældet med 2. generations dynamik (almindelig fejlkorrektionstil-pasning).

Den løsning, vi foreslår, er, at estimere udgiftssystemet simultant (som hidtil), opskrive de estimerede ligninger for de *n*-1 varer (her *fCg*) og residualbestemme efterspørgselsen efter den *n*'te vare (her *fCk*) ud fra budgettet og udgifterne til de øvrige varer i udgiftssystemet.

Litteratur

- Rasmus Holm Madsen, Anne Bender & Dorte Grinderslev: *Ny transport-model - valg mellem benzin og kollektiv transport*. RHM25102
- Rasmus Holm Madsen: *Ny transportmodel til ADAM, februar 2002 - endelige ligninger*. RHM29502