Danmarks Statistik
MODELGRUPPEN
Carl-Johan Dalgaard

Arbejdspapir*
16.Januar 1998

Usercost
- diskret vs. kontinuert tid

Resumé:

I nærværende papir betones det, at antagelsen om tidsaksens karakter - diskret eller kontinuert - ikke er aldeles triviel i relation til analysen af virksomhedernes faktorefterspørgsel. Således vises det, at usercost-udtrykkene modificeres, hvis tidsaksen antages diskret fremfor kontinuert, når det teoretiske problem løses. Som et generelt resultat af analysen haves, at omfanget af potentielle kapitalgevinster/-tab dæmpes i tilfældet med diskret tidsakse vis-á-vis den kontinuerte modellering. Endvidere betyder problemets formulering i diskret tid, at det bliver muligt at diskutere implikationerne af forskellige antagelser vedrørende hastigheden, hvorved nyinvesteringer kan anvendes i produktionsprocessen. Specielt vises, at forventninger til fremtidig produktion og forventninger til fremtidig lønudvikling kan være relevante variable i forhold til kapitalefterspørgslen; selv i fravær af tilpasningsomkostninger.

CJM16198.tex

Nøgleord: Usercost, dynamisk optimering, diskret tid.

1 Indledning

I PBR270193 er det grundlæggende usercost-udtryk der anvendes i ADAMs faktorblok udledt i tradition med Jorgenson (1963). Det bagvedliggende profit - / omkostningsminimeringsproblem er formuleret i kontinuert tid og efterfølgende løst.

En fordel ved at arbejde i kontinuert tid er, at løsningen af økonomiske modeller næsten altid er enklere (dersom der er en forskel) end det diskrete modstykke. Dette virker som et meget teknisk argument for kontinuert-tid formuleringen (hvad det selvfølgelig også er), men man kan også fremføre en fordel ved den kontinuerte formulering med mere økonomisk-teoretisk baggrund. Vi betragter normalt en gruppe af virksomheder eller agenters handlinger under ét når det teoretiske profitmaksimeringsproblem løses. I dét omfang disse ikke handler samtidigt (hvilket synes at være en rimelig formodning), kan den kontinuerte formulering således synes appelerende, idet den netop tillader at folk handler ”løbende”.[1]

På den anden side er de data man arbejder med af diskret karakter, dvs. opgjort ved indgangen til en given periode eller ved udgangen af en periode. Som konsekvens heraf er det den diskrete formulering man anvender dersom modeller estimeres (eller simuleres).

Umiddelbart er det således ikke indlysende, at den ene antagelse angående tidsbegreb er bedre end den anden i abstrakt henseende. Men i nogen sammenhænge kan kontinuert-tid formuleringen være lidt farlig, siden periodelængden bliver uendelig kort, hvorfor det hænder at effekter - så at sige - ”-forsvinder ud”. Det er også tilfældet for nærværende, hvor kapitalens usercost betragtes.

Papiret er struktureret på følgende måde. Vi starter med at løse det grundlæggende profitmaksimeringsproblem i kontinuert tid. I afsnit 3 diskuteres det tilsvarende problem, og de afledte usercostudtryk, når tidsaksen antages diskret. Afsnit 4 er reserveret til afsluttende bemærkninger og diskussion.

2 Problemet i kontinuert tid

I dette og de efterfølgende afsnit antages det, at virksomhederne er pristagere på faktormarkederne og at kapital-og arbejdskraft tilpasningen sker gnidningsfrit. Desuden ses der bort fra eksisistensen af forvridende skatter.[2] Effekten af skattesystemet på virksomhedens faktorefterspørgsel vil blive analyseret i et senere papir.

Følgelig haves, at en virksomhed der ønsker at maksimere profitten over en

[1] Jf. Groth (1991).

[2] Dette indebærer at vi ved at appelere til Modigliani-Miller teoremet kan se bort fra finansieringsbeslutningen i analysen.

uendelig tidshorrisont søger at løse følgende problem:

$$\underset{\{I,K,N\}_{t=0}^{\infty}}{MAX} \int_0^{\infty} [p(t)F(K(t),L(t)) - W(t)L(t) - q(t)I(t)]\, e^{-\int_0^t i(\tau)d\tau}. \tag{1}$$

Historien indenfor den kantede parentes er den løbende profit. p er output prisen, F er produktionsfunktionen med input af kapital K og arbejdskraft L, W er den nominelle løn, q er investeringsprisen. $i(t)$ er den nominelle (momentan) rente. Virksomheden er underlagt restriktionen, at beskæftigelsen skal være strengt positiv

$$L(t) > 0, \tag{2a}$$

samt den velkendte akkumulationsligning

$$\dot{K}(t) = I(t) - \delta K(t), \tag{3}$$

der angiver at tilvæksten i kapitalbeholdningen svarer til bruttoinvesteringerne minus afskrivningerne δK.[3] Der er tale om et optimalt kontrolproblem, med tilstandsvariablen K og kontrolvariablene L, I.[4]

Problem kan løses ud vha. Pontryagins maksimumsprincip. Førsteordensbetingelserne der er nødvendige og (i dette tilfælde) tilstrækkelige for en optimal bane $\{I, K, L\}_0^{\infty}$, og som er opfyldt løbende er:[5]

$$L : F_N(K(t), L(t)) = w(t), \text{ hvor } w(t) \equiv \frac{W(t)}{p(t)} \tag{4}$$

$$I : q(t) = \lambda(t) \tag{5}$$

$$K : \frac{p(t)}{\lambda(t)} F_K(K(t), L(t)) - \delta = i(t) - \frac{\dot{\lambda}(t)}{\lambda(t)}. \tag{6}$$

Den første afledte (4) angiver, at arbejdskraften ansættes indtil marginalproduktiviteten svarer til reallønnen - der er udefra givet for virksomheden. (5) er førsteordensbetingelsen tilordnet investeringsbeslutningen. q er prisen på investeringsgoder, hvorfor denne udgør grænseomkostningen ved investering. Følgelig synes det klart, at $\lambda(t)$ - hjælpevariablen tilordnet maksimeringsproblemet - skal tolkes som grænseafkastet af investeringer. I realiteten implicerer (5) opretholdelsen af Tobins Q.[6] For at se dette, husk at Tobins Q er defineret som følgende forhold

$$Q = \frac{\text{grænseafkastet på investering}}{\text{grænseomkostning ved investering}},$$

[3] Desuden er der den såkaldte terminalbetingelse, der pålægges kapitalbeholdningen i grænsen. Denne ignoreres imidlertid i denne fremstilling.

[4] Investeringerne er ”frie” - man kan jo have negative bruttoinvesteringer. Følgelig er der ikke indført en restriktion på denne variabel.

[5] Principielt er der det problem, at disse førsteordensbetingelser ikke nødvendigvis er opfyldt for det historisk givne $K(0)$, hvilket vil betyde (i denne model uden tilpasningsomkostninger) at kapitalbeholdningen springer. Dersom priserne i modellen er kontinuerte (og differentiable) variable - hvilket hermed antages - vil dette imidlertid kun ske i den første 'periode'. Herefter er førsteordensbetingelserne opfyldt. Med det forbehold er analysen teknisk konsistent.

[6] Mere præcist Tobins marginale Q. Se Hayashi (1982).

hvilket i nærværende model netop svarer til forholdet $\frac{\lambda}{q}$. Tobins regel lyder: Invester' indtil $Q = 1$, og (5) implicerer at:

$$\frac{\lambda(t)}{q(t)} = Q(t) = 1,$$

på alle tidspunkter langs den optimale bane. Det er tydeligt, at investeringsintensisten ikke bestemmes ved (5). Dette skyldes fraværet af tilpasningsomkostninger. I stedet er I implict fastlagt gennem (3), når kapitalefterspørgslen er bestemt via (6).

Virksomheden vil ifølge (6) efterspørge kapital indtil det punkt, hvor virksomhedens grænseafkast ved investering - og derved forøgelse af kapitalbeholdningen med een enhed - svarer til omkostningen ved at købe og eje kapital i en tidsenhed. For at opnå et udtryk for disse omkostninger kræves en smule omregning. Ved at udnytte at Tobins Q er opfyldt på alle tidspunkter, hvilket også betyder at $\frac{\dot{q}}{q} = \frac{\dot{\lambda}}{\lambda}$, kan (6) omskrives til[7]

$$p(t)F_K(K(t), L(t)) = q(t)\left[i(t) - \frac{\dot{q}(t)}{q(t)} + \delta\right] \equiv u(t). \tag{7}$$

Højresiden udgør kapitalens usercost $(u(t))$. Det vil sige omkostningen ved at eje kapital i een tidsenhed. Disse omkostninger kan dekomponeres i to dele. Dels omkostningen ved at erhverve sig kapital $q(t)$, og dels omkostningen ved at holde kapitalen $\left[i(t) - \frac{\dot{q}(t)}{q(t)} + \delta\right]$.[8] Omkostningerne ved at eje kapitalen udgøres dels af alternativomkostningen ved investering $(i(t))$, dels af den potentielle værdiforringelse af (eller værdistigning på) de indkøbte maskiner i form af $\frac{\dot{q}(t)}{q(t)}$ og dels i form af nedslidningen, der finder sted i løbet af en tidsenhed. $\frac{\dot{q}(t)}{q(t)}$ er i modellen udtryk for udviklingen i nyprisen på de anvendte maskiner. I modellen sondres der ikke mellem ny og gammel kapital. Tværimod antages det, kontrafaktisk, at gamle maskiner ved salg kan indbringe nyprisen. Derfor mindskes 'realrenten' $\left(i(t) - \frac{\dot{q}(t)}{q(t)}\right)$ved almindelig inflation i investeringsprisen, siden dette indenfor rammerne af modellen implicerer, at de installerede maskiner er steget i værdi. Producenten har dermed reelt modtaget en kapitalgevinst. For at undgå dette aspekt af modellen kræves introduktion af årgangsmodeller, hvilket dog vil øge kompleksiteten af analysen markant.

Bemærk at (7) angiver at usercost udelukkende består af nutidige variable. Kapitalefterspørgslen kan således skrives:

$$K^*(t) = K\left(u(t), W(t), p(t)\right). \tag{8}$$

Det ses, at K^* udelukkende afhænger af de - på beslutningstidspunktet - *observerbare* priser *og* prisændringer: $i(t), W(t), p(t), q(t)$ og $\dot{q}(t)$. Læg specielt

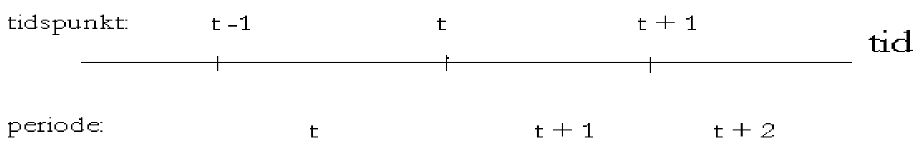
[7] En prik over en variabel angiver den afledte mht. tiden.

[8] Hvis der optrådte forvridende skatter i modellen, hvorfor Modigliani-Miller teoremet ikke ville kunne anvendes, da ville der være tre elementer; det tredie ville være omkostningerne ved finansiering (omkostningen ved at fremskaffe midlerne til at betale q pr. investeringsenhed), der i sin tur ville afhænger af den konkrete skattestruktur.

mærke til, at prisstigningsintensiteten $\dot{q}(t)$ er kendt.[9] Det er måske lidt forvirrende, men det hænger sammen med det forhold, at hver periode er uendelig kort ("tidspunkt" og "periode" smelter sammen), hvilket indebærer at også prisstigninger reelt er observerbare på beslutningstidspunktet i den tænkte modelverden. I ADAM betragtes $\frac{\dot{q}(t)}{q(t)}$ imidlertid som en forventet størrelse $E\left[\frac{\dot{q}(t)}{q(t)}\right]$, hvor forventningsdannelsen (når det gælder maskinkapital) antages adaptiv. Men ifølge denne teoretiske model er $\frac{\dot{q}(t)}{q(t)}$ observerbar - hvilket følger af set up'et - hvorfor den forventede værdi naturligvis også er kendt. Denne er nødvendigvis lig den faktiske, med mindre informationen (eller rationaliteten) er begrænset.[10] Disse betragtninger leder til den ofte fremførte slutning, at i dynamiske modeller for den kompetetive producents problem - i fravær af tilpasningsomkostninger, indbyggede teknologiske fremskridt, usikkerhed eller andre imperfektioner - da kollapser problemet til en serie statiske problemer. Dette virker ganske naturligt, siden ovennævnte antagelser indikerer, at beslutninger idag ikke lægger bånd på virksomhedens fremtidige beslutningsmuligheder. Følgelig virker det plausibelt, at fremtidige variable er uden betydning. Men som det bliver klart i næste afsnit; problemet formuleret i diskret tid afviger herfra, hvorfor resultatet, at faktorefterspørgslen er afhængig af nutidige variable alene, ikke længere holder generelt..

3 Problemet i diskret tid

Inden vi starter, er det nødvendigt kort at diskutere dateringen. Vi indfører *ultimo* datering. Det indebærer f.eks. at tidspunktet t ligger ved indgangen til periode $t+1$. Tidsstrukturen er gengivet i figuren nedenfor.



Figur 1. Tidsstrukturen

Det der gør tingene lidt besværlige er, at beholdningsstørrelser sædvanligvis opgøres ved udgangen af perioden, hvilket modellen gerne må afspejle. Således vil kapitalbeholdningen, der er til rådighed ved indgangen til periode t, være K_{t-1} (jf. figuren). Alle strømstørrelser er dateret efter perioden - f.eks. er investeringerne i periode t givet ved I_t.

[9] Hvis $q(t)$ er differentiabel, hvilket er antaget ovenfor. (jf. fodnote 5)
[10] Se f.eks. Nickell (1978), kapitel 1, for mere herom.

Som udgangspunkt indføres følgende antagelse om produktionen Y i periode t :

$$Y_t = F(K_{t-1}, L_t). \tag{9}$$

(9) angiver således, at det er kapitalbeholdningen ved indgangen til periode t, og arbejdskraftinputet i periode t der ligger til grund for produktionen i periode t. I analysen nedenfor dateres beskæftigelsen L_t som en flowstørrelse. Desuden indføres den sædvanlige dynamiske identitet for kapitalakkumulationen:

$$K_t = I_t + (1-\delta)K_{t-1}, \ 0 < \delta < 1. \tag{10}$$

Kapitalakkumulationsligningen, der udgør bibetingelsen til problemet, der løses nedenfor, angiver, at kapitalbeholdningen til rådighed på tidspunkt t udgøres af investeringerne foretaget i periode t og af $(1-\delta)K_{t-1}$. K_{t-1} er kapitalbeholdningen på tidspunkt $t-1$ og δ er den konstante nedslidningsrate.

Det er ikke helt ligegyldigt hvordan timingen i modellen formaliseres. Lad os sige, at periodelængden er et år - som det er tilfældet i ADAM. I så fald betyder $Y_t = F(K_{t-1}, L_t)$ og relation (10) i forening, at kapital købt i indeværende år først er til rådighed for produktion næste år. Alternativet er at antage, at kapitalen finder anvendelse i indeværende periode, hvilket vil svare til, at antage at $Y_t = F(K_t, L_t)$ mens (10) fastholdes. Også denne tilgang leder imidlertid til "ubehageligheder": Dersom kapitalen umiddelbart kan anvendes ved indkøbet, da indebærer timingstrukturen, at kapital købt i f.eks. december allerede har været produktiv i januar. At det forholder sig på denne måde i modellen kan indses ved at huske på dateringskonventionen - ultimodatering: K_t er kapitalbeholdningen ved udgangen af periode $t-$ som vi i ex ante modellen siger er med til at fastlægge produktionen i periode t.

I mangel af bedre begreber, og for at have noget fast at tale om, benævnes modellen, der anvender produktionsfunktionen $Y_t = F(K_{t-1}, L_t)$, for "ex post modellen"; i modellen er investeringer først produktive ex post perioden, hvor de foretages. $Y_t = F(K_t, L_t)$ formaliseringen benævnes derfor, for klarheds skyld, "ex ante modellen".

Bemærk, at der ikke er tale om et simpelt dateringsskift mellem de to tilfælde - forskellen vedrører hvilken beholdning af kapitalen der er relevant i forhold til produktionen i en given periode: Beholdningen ved *indgangen* til perioden (ex post) eller ved *udgangen* af perioden (ex ante). Siden valget mellem $Y_t = F(K_{t-1}, L_t)$ eller $F(K_t, L_t)$ ikke er aldeles oplagt (de er grundlæggende lige ekstreme) virker det relevant at undersøge begge modeller.

I afsnit 3.1 undersøges således implikationerne af ex post modellen for usercost og kapitalefterspørgsel. I afsnit 3.2 diskuteres ex ante modellen og det afledte usercostudtryk sammenlignes med det fundne i afsnit 3.1.

3.1 Usercost - ex post modellen, $Y_t = F(K_{t-1}, L_t)$

Med dette sagt, er vi klar til at opskrive producentens dynamiske profitmaksimeringsproblem i diskret tid. Lad os sige, at vi står ved indgangen til periode t og skuer frem, der er ingen skatter og ingen usikkerhed. I så fald ønsker producenten at maksimere følgende udtryk for den tilbagediskonterede profit:

$$\underset{\{I_s,L_s\}_{s=t}^{\infty}}{MAX} \sum_{s=t}^{\infty} \left(\frac{1}{1+i}\right)^{s-t} \left[p_s F(K_{s-1}, L_s) - w_s L_s - q_s I_s\right]. \tag{11}$$

i er diskonteringsraten - den nominelle rente. Denne antages for simplicitet konstant - f.eks. givet ved det tyske renteniveau.[11] p_s er produktprisen i betragtede periode.[12] F er en neoklassisk produktionsfunktion med de sædvanlige egenskaber. w_s er lønnen i betragtede periode, og q_s er investeringsprisen. I_s er investeringerne der foretages i nærværende periode. Problemets løsning kræver ikke anvendelsen af nogen speciel avanceret form for matematisk metode, såsom Pontryagins maksimumsprincip. I stedet kan problemet løses ved at indsubstituere (10) i (11) og efterfølgende differentiere:

$$\underset{\{K_s,L_s\}_{s=t}^{\infty}}{MAX} \sum_{s=t}^{\infty} \left(\frac{1}{1+i}\right)^{s-t} \left[p_s F(K_{s-1}, L_s) - W_s L_s - q_s \left(K_s - (1-\delta)K_{s-1}\right)\right],$$

mht. K_t, L_t. Dette er gjort i appendix A. Her er det endvidere vist, at usercost udtrykket $(u_t)$for perioden t er:

$$p_{t+1} F_K(K_t, L_{t+1}) = u_t = q_t \left[i + \delta - (1-\delta)\left(\frac{q_{t+1} - q_t}{q_t}\right)\right]. \tag{12}$$

Lad os dvæle ved (12) et øjeblik. Usercost for perioden t afhænger af investeringsprisen i periode t, af nedslidning og rente. Bemærk, at det er den leadede værdi af kapitalens marginalprodukt der optræder på venstre side. Forklaringen på at $p_{t+1}F_K(K_t, L_{t+1})$ indgår, og ikke $p_t F_K(K_{t-1}, L_t)$, er at venstresiden i (12) udgør afkastet på den del af kapitalapparatet der indkøbes i periode t via investeringsbeslutningen. Investeringsgodet indkøbes perioden t, men afkastet kommer først een periode senere, når kapitalen anvendes i produktionen. Derfor vil et (forventet) produktprisfald øge de reale usercosts, idet *værdien* af kapitalens marginalprodukt - når den kommer i anvendelse - dermed reduceres.

Det næste centrale i (12) er, at inflationsleddet dæmpes med $(1-\delta)$. Grunden til at $\left(\frac{q_{t+1}-q_t}{q_t}\right)$ i det hele taget indgår er, at en prisstigning på kapitalgoder giver anledning til en kapitalgevinst for producenten ved at holde kapital

[11] Hvis problemet skal tillade variabel rente vil den relevante diskonteringsfaktor være

$$\beta_{s-t} = \prod_{v=t}^{s-t} \frac{1}{1+i_v},$$

hvor β_{s-t} således skal erstatte $\left(\frac{1}{1+i}\right)^{s-t}$.

[12] Om priser generelt bør opfattes som en beholdning eller en strøm er muligvis et åbent spørgsmål - her vælges det at betragte *alle* modellens priser som strømvariable.

fra periode t til periode $t+1$. Men siden kapitalen i løbet af samme periode som prisstigningen finder sted nedslides, er det klart at det kun er den ikke-nedslidte kapital man opnår en gevinst på (andelen $(1-\delta)$). Dette element fanges ikke hvis tiden antages kontinuert - siden hver periode er uendelig kort har der (et eller andet sted) ikke sket nogen nedskrivning af kapitalen i løbet af denne. Det er tydeligt at faktorefterspørgslen ikke er "statisk" længere; usercost afhænger også af fremtidige priser. Følgelig kan man - under antagelse af usikkerhed - skrive forventede usercost for perioden t som:

$$p_{t+1}^{e} F_K(K_t, L_{t+1}) = u_t^e = q_t \left[i + \delta - (1-\delta) \frac{(q_{t+1}^e - q_t)}{q_t} \right]. \tag{13}$$

I fastlæggelsen af usercost, bør den forventede inflation således vægtes med $(1-\delta)$. Hvis ikke dette sker undervurderes kapitalomkostningerne.

Hvis omkostningsminimeringsproblemet løses opnås følgende usercost-udtryk:[13]

$$W_{t+1} \frac{F_K(K_t, L_{t+1})}{F_L(K_t, L_{t+1})} = u_t = q_t \left[i + \delta - (1-\delta) \frac{(q_{t+1} - q_t)}{q_t} \right], \tag{14}$$

hvor F_K, F_L er hhv. kapitalens - og arbejdskraftens marginalproduktivitet. På venstresiden indgår den *forventede* nominelle timeløn. Årsagen er igen, at der er et *lag* i kapitalinvesteringerne - investering i periode t er først til rådighed i næste periode. Følgelig afgøres faktorsubstitutionen af forholdet mellem usercost og den (forventede) nominelle løn i perioden *efter* investeringen foretages.[14] I forlængelse af disse overvejelser kan det være nyttigt at kikke på kapitalefterspørgselsfunktionen, udledt på baggrund af omkostningsminimeringsproblemet. Antag at produktionsfunktionen er CES, specifikt:[15]

$$Y_t = \left[\rho K_{t-1}^{\frac{\sigma-1}{\sigma}} + (1-\rho) L_t^{\frac{\sigma-1}{\sigma}} \right]^{\frac{\sigma}{\sigma-1}}. \tag{15}$$

Ved brug af (14) og (15) kan faktorefterspørgselsfunktion for K_t vises at være givet ved:[16]

$$K_t^* = Y_{t+1} \rho^{\frac{\sigma}{\sigma-1}} \left[1 + \left(\frac{1-\rho}{\rho} \right)^{\sigma} \left(\frac{W_{t+1}}{u_t} \right)^{1-\sigma} \right]. \tag{16}$$

Den ønskede kapitalbeholdning ved udgangen af periode t, K_t^*, er således en funktion af produktion og løn i periode $t+1$. Dette betyder, at dersom nærværende model tages for pålydende, da bør der i estimationshenseende også tages højde for forventninger til fremtidig produktion og nominel løn.

[13] Problemet er løst i appendix B.

[14] (14) er blot udtryk for den sædvanlige mikroøkonomiske betingelse for optimal brug af produktionsfaktorer - nemlig at det marginale tekniske substiutionsforhold skal svare til det relative prisforhold mellem inputs.

[15] I ADAM kaldes vægtparameteren normalt $\delta-$ her afviges fra denne konvention, for ikke at blande faktorvægtene sammen med nedslidningen. Ydermere optræder der ofte en skalaparameter, kaldet κ i ADAM. Denne er sat til 1.

[16] Se modelgruppepapiret edm240598.

3.2 Usercost - ex ante modellen, $Y_t = F(K_t, L_t)$

I dette afsnit antages, at en investering finder umiddelbar anvendelse, dvs. at investeringer der gennemføres i periode t allerede er operationelle på tidspunkt t. Antag derfor at $Y_t = F(K_t, L_t)$. Altså: Hvis virksomheden investerer i realkapital i løbet af (f.eks.) 1998, da vil investeringer og nedslidning bestemme den resulterende kapitalbeholdning, der i sin tur ligger til grund for output allerede i 1998, og *ikke* 1999 som formaliseringen ovenfor ville have impliceret. Om denne tilgang er mere ønskværdig end ex post modellen er nok en smagssag - i praksis er det mest realistiske nok en blanding af de to. Det afgørende er imidlertid at få klarlagt om resultaterne ovenfor er følsomme overfor denne ændring. Profitmaksimeringsproblemet skal nu se således ud:

$$\underset{\{K_t,L_t\}_{t=0}^{\infty}}{MAX} \sum_{s=t}^{\infty} \beta^{s-t} \left[p_s F(K_s, L_s) - W_s L_s - q_s \left(K_s - (1-\delta)K_{s-1}\right)\right],$$

hvor den eneste forskel til ovenfor er, at $F(K_s, L_s)$ erstatter $F(K_{s-1}, L_s)$. Problemet er løst i appendix C. Det resulterende real usercost-udtryk er:

$$p_t F_K(K_t, L_t) = u_t = \frac{q_t}{(1+i)} \left[i + \delta - (1-\delta)\left(\frac{q_{t+1} - q_t}{q_t}\right)\right]. \tag{17}$$

En hurtig sammenligning med (12) afslører, at de to udtryk ikke er ens.

For det første multipliceres (17) med $\left(\frac{1}{1+i}\right)$. Forklaringen er som følger. Investeringer gennemføres i løbet af perioden til den løbende pris q_t– disse investeringer er imidlertid allerede virksomme ved *indgangen* til perioden, hvorfor omkostningerne skal *tilbagediskonteres* 1 periode, før de kan sammenlignes med afkastet $p_t F_K$. Det samme gælder den forventede kapitalgevinst (eller tab) og nedslidningen. I ex ante modellen har renten således to *modsat rettede* effekter på usercost (i) en øget rente øger alternativomkostningen ved investeringen (den traditionelle påvirkning), (ii) øget rente sænker den tilbagediskonterede værdi af omkostningerne, hvilket trækker i retning af *mindskede* usercost. Samlet vil den første effekt altid dominere. Den anden forskel mellem udtrykkene (12) og (17) er, at p_t optræder fremfor p_{t+1}. Det skyldes, at output nu produceres ved indgangen til periode t, baseret på kapitalapparat delvis dannet ved investeringer i periode t, hvorfor den relevante produktpris bliver p_t.

Ved at løse omkostningsminimeringsproblemet, kan det vises, at ex ante modellen leder til følgende efterspørgsel efter kapital (for givet output Y_t) :

$$K_t^* = Y_t \rho^{\frac{\sigma}{\sigma-1}} \left[1 + \left(\frac{1-\rho}{\rho}\right)^{\sigma} \left(\frac{W_t}{u_t}\right)\right],$$

hvor u_t er givet ved (17). Bemærk, at i denne formulering er kapitalefterspørgslen bestemt af nutidige variable ganske som i den kontinuerte model (jf. (8)), *undtaget* inflationen der indgår i (17).

Udkomme af dette afsnit er altså: (i) hvis ex ante modellen anvendes fremfor ex post modellen mindskes rentens effekt på usercost. (ii) Under ex ante modellen er det produktprisen/den nominelle løn for indeværende periode, og ikke den forventede produktpris/nominelle løn i næste periode, der er afgørende for usercost i reale termer. (iii) Dæmpningen af kapitalgevinstleddet er uændret i de to set-up. Begrundelsen for denne dæmpning er fremført i sidste afsnit.

4 Afsluttende bemærkninger og diskussion

Nærværende papir har undersøgt og sammenlignet de teoretiske forudsigelser af en velkendt intertemporal model for den kompetetive virksomhed, under antagelse om kontinuert - hhv. diskret tid.

At denne distinktion er væsentlig - i lyset af forskelligheden af de to modellers prediktioner - understreges af den hyppige brug af approximationen 'kontinuert tid' i empiriske analyser. Som f.eks. Galeotti (1996) påpeger det i introduktionen til hans omfattende oversigt over litteraturen på området

> [...] the analysis is formulated in continous time. The discrete nature of economic data notwithstanding, most empirical contributions in this area implement (approximate) solutions to continous time dynamic optimization problems. (s. 422)

Papiret har således som hovedkonklusion at denne tilgang kan være problematisk.

Mere specielt sås det, at den diskrete model angav, at inflationsleddet i usercost bør dæmpes med faktoren $(1-\delta)$. Empirisk vil omfanget af denne dæmpning afhænge af erhvervet der betragtes.

I analysen blev der sondret mellem to formaliseringer af produktionsfunktionen, der afspejler hastigheden hvorved investeringer finder produktiv anvendelse. I afsnit 3.1. betragtedes situationen hvor investeringer i indeværende periode først finder anvendelse i den følgende periode. Denne tilgang er den oftest anvendte i dynamiske AGL-modeller. Under denne formalisering sås, at den *forventede* produktion og timeløn, foruden forventet prisstigningstakt på investeringsgoder, alle kan være relevant variable i forhold til kapitalefterspørgslen. Konventionel visdom vil vide, at under antagelse om perfekte markeder, fravær af usikkerhed samt kapitalinstalleringsomkostninger, da kollapser producents problem til det statiske. Afsnit 3.1 viser således at dette kun generelt er tilfældet hvis tidsaksen i tillæg antages kontinuert. I afsnit 3.2 blev det antaget, at investeringer umiddelbart (dvs. i indeværende periode) finder anvendelse. Herigennem kom kapitalefterspørgselsligningen til at ligne den kontinuerte modpart, men dæmpningen af inflationsdelen i usercost bestod. Desuden blev det vist, at rentens positive effekt på usercost dæmpes i denne formulering.

Litteratur

[1] Abel, Andrew B., 1990. *Consumption and Investment.* Handbook of Monetary Economics Vol. II, Kap. 14. Ed. Friedman, B.M. og Hahn F.H., Elsevier Science Publishers B.V.

[2] Felipe, J. og J.S.L. McCombie, 1997. *Some Methodological Problems with Recent Analysis of the East Asian Miracl*e. Working paper, præsenteret på Project LINK konferencen, efteråret 1997.

[3] Galeotti, M., 1996. *The intertemporal dimension of neoclassical production theory.* Journal of Economic Surveys vol.10, s. 421-460.

[4] Groth, Christian, 1991. *Noter til økonomisk vækst bind 2.* 2. udgave. Økonomisk Institut, Københavns Universitet.

[5] Hall R.E. og D.W. Jorgenson, 1967. *Tax policy and Investment behavior.* American Economic Review, s. 391-414.

[6] Hayashi F., 1982. *Tobin's Marginal q and Average q: A Neoclassical Interpretation.* Econometrica, s. 213-24.

[7] Jorgenson, D., 1963. Capital Theory and Investment Behavior. American Economic Review, s.247-59.

[8] Madsen E., 1996. *Udledning af faktorefterspørgselsfunktioner fra trefaktor "nestet" CES-produktionsfunktion.* Danmarks Statistik, Arbejdspapir, Modelgruppen.

[9] Nickell, Steven J., 1978. *The Investment Decision of the Firm.* Cambridge University Press, Oxford.

[10] Obstfeld, M. og Rogoff, K., 1996. *Foundations of International Macroeconomics.* MIT Press, Cambridge MA.

[11] Olesen, Henrik Christian, 1997. Project LINK, efterårsmøde 1997. Danmarks Statistik, Arbejdspapir, Modelgruppen.

[12] Pedersen, Morten M., 1997. *Bruttokapital, nettokapital, usercost og andet godt II: Nogle praktiske problemstillinger.* Danmarks Statistik. Arbejdspapir, Modelgruppen.

[13] Pissarides, Christoffer A., 1990. *Equilibrium Unemployment Theory,* ch.2. Basil Blackwell.

[14] Rasmussen, Per B., 1993a. *Usercost-udtrykket i udbudsprojektet - Teori.* Danmarks Statistik. Arbejdspapir, Modelgruppen.

[15] Rasmussen, Per B., 1993b. *Usercost-udtrykket i udbudsprojektet - praktiske problemstillinger.* Danmarks Statistik. Arbejdspapir, Modelgruppen.

A Profitmaksimeringsproblemet

Problemet, som opskrevet ovenfor, $\left(\left(\frac{1}{1+i}\right)=\beta\right)$er:

$$\underset{\{K_t,L_t\}_{t=0}^{\infty}}{MAX} \quad \sum_{s=t}^{\infty}\beta^{s-t}\left[p_s F(K_{s-1},L_s)-W_s L_s-q_s\left(K_s-(1-\delta)K_{s-1}\right)\right].$$

De nødvendige betingelser for en optimal bane er givet ved:

$$L_t : [p_t F_L(K_t,L_t)-W_t]=0$$

$$K_t : (-q_t)+\beta\left(p_{t+1}F_K(K_t,L_{t+1})+q_{t+1}(1-\delta)\right)=0. \tag{18}$$

Hvis det udnyttes at diskonteringsfaktoren $\beta=\frac{1}{1+i}$ kan (18) skrives:

$$\begin{aligned}
(p_{t+1}F_K(K_t,L_{t+1})+q_{t+1}(1-\delta)) &= (1+i)\,q_t \\
&\Updownarrow \\
p_{t+1}F_K(K_t,L_{t+1}) &= (1+i)\,q_t-q_{t+1}(1-\delta) \\
&\Updownarrow \\
p_{t+1}F_K(K_t,L_{t+1}) &= iq_t+q_t-q_{t+1}+q_{t+1}\delta. \\
&\Updownarrow \\
p_{t+1}F_K(K_t,L_{t+1}) &= u_t=q_t\left(i-\left(\frac{q_{t+1}-q_t}{q_t}\right)+\frac{q_{t+1}}{q_t}\delta\right) \\
&\Updownarrow \\
p_{t+1}F_K(K_t,L_{t+1}) &= u_t=q_t\left[i+\delta-\left(\frac{q_{t+1}-q_t}{q_t}\right)(1-\delta)\right],
\end{aligned}$$

hvilket var udtrykket der skulle vises.

B Omkostningsminimeringsproblemet

Dette problem kan imidlertid ikke løses ved simpel substitution. Her er det nødvendigt at ty til Lagrange optimering.[17] Problemet er:

$$\underset{\{L_s,I_s,K_s\}_{s=t}^{\infty}}{MAX} \quad -\sum_{s=t}^{\infty}\beta^{s-t}\left(W_sL_s+q_sI_s\right)$$

$$u.bib.$$

$$Y_t = F(K_{t-1},L_t)$$

$$K_t = I_t + (1-\delta)K_{t-1}$$

Lagrangefunktionen

$$MAX\ -\sum_{s=t}^{\infty}\beta^{s-t}\left\{W_sL_s+q_sI_s+\lambda_{1,s}\left(F(K_{s-1},L_s)-Y_s\right)+\lambda_{2,s}\left(K_s-I_s-(1-\delta)K_{s-1}\right)\right\}$$

$$\begin{aligned} L_t \quad &: \quad (W_t + \lambda_{1,t}F_L(K_{t-1},L_t)) = 0 \\ &\Updownarrow \\ \lambda_{1,t} \quad &= \quad -\frac{W_t}{F_L(K_{t-1},L_t)} \end{aligned} \tag{19}$$

$$\begin{aligned} I_t \quad &: \quad (q_t - \lambda_{2,t}) = 0 \\ &\Updownarrow \\ q_t \quad &= \quad \lambda_{2,t}. \end{aligned} \tag{20}$$

$$K_t : \lambda_{2,t} + \beta\left(\lambda_{1,t+1}F_K(K_t,L_{t+1}) - \lambda_{2,t+1}(1-\delta)\right) = 0 \tag{21}$$

ved at udnytte (19), (20) og definitionen af β kan (21) skrives

$$(1+i)q_t - q_{t+1}(1-\delta) = \frac{W_{t+1}F_K(K_t,L_{t+1})}{F_L(K_t,L_{t+1})},$$

hvorfor vi har at

$$W_{t+1}\frac{F_K(K_t,L_{t+1})}{F_L(K_t,L_{t+1})} = u_t = q_t\left[i - \frac{(q_{t+1}-q_t)}{q_t}(1-\delta)+\delta\right],$$

hvilket skulle vises.

[17] Se fx Obstfeldt og Rogoff (1996) s. 745 ff.

C Profitmaksimeringsproblemet - $Y = F(K_t, L_t)$

Problemet opskrevet i teksten:

$$\underset{\{K_t, L_t\}_{t=0}^{\infty}}{MAX} \sum_{s=t}^{\infty} \beta^{s-t} \left[p_s F(K_s, L_s) - W_s L_s - q_s \left(K_s - (1-\delta) K_{s-1} \right) \right].$$

Førsteordensbetingelsen mht. K:[18]

$$\begin{aligned}
K_t &: \; p_t F_K - q_t + \beta \left(q_{t+1} \right) (1-\delta) = 0 \\
&\Updownarrow \\
p_t F_K &= q_t - \beta \left(q_{t+1} \right) (1-\delta) \\
&\Updownarrow \\
p_t F_K &= q_t - \beta \left(q_{t+1} \right) + \beta \delta q_{t+1} \\
&\Updownarrow \; \text{ da } \beta = 1/(1+i) \\
p_t F_K &= \frac{(1+i)\, q_t - \left(q_{t+1} \right)}{(1+i)} + \frac{\delta q_{t+1}}{(1+i)} \\
&\Updownarrow \\
p_t F_K &= \frac{q_t - q_{t+1}}{(1+i)} + \frac{i q_t}{(1+i)} + \frac{\delta q_{t+1}}{(1+i)} \\
&\Updownarrow \\
p_t F_K &= \frac{q_t}{(1+i)} \left[\left(\frac{q_t - q_{t+1}}{q_t} \right) + i + \delta \frac{q_{t+1}}{q_t} \right] \\
&\Updownarrow \\
p_t F_K &= \frac{q_t}{(1+i)} \left[i - \left(\frac{q_{t+1} - q_t}{q_t} \right) + \delta \frac{q_{t+1}}{q_t} - \delta \frac{q_t}{q_t} + \delta \frac{q_t}{q_t} \right] \\
&\Updownarrow \\
p_t F_K &= \frac{q_t}{(1+i)} \left[i - \left(\frac{q_{t+1} - q_t}{q_t} \right) + \delta \frac{q_{t+1} - q_t}{q_t} + \delta \frac{q_t}{q_t} \right] \\
&\Updownarrow
\end{aligned}$$

$$p_t F_K = \frac{q_t}{(1+i)} \left[i + \delta - (1-\delta) \left(\frac{q_{t+1} - q_t}{q_t} \right) \right] \tag{22}$$

[18] I nærværende sammenhæng ignoreres den afledte mht. L.