Danmarks Statistik
MODELGRUPPEN
Thomas Thomsen

Arbejdspapir*
15. januar 2006

Effektivitetsindeks revisited

Resumé:

Der ses i papiret på, hvordan K-effektiviteten meningsfuldt kan have negativ vækstrate, og det vises at dette blot betyder, at teknologiudviklingen har et K-bias. Så længe kapitalens faldende (økonomiske) "effektivitet" overdøves af stigende effektiviteter for andre faktorer, er der ikke noget problematisk ved dette. Fænomenet eksemplificeres vha. translog-omkostningsfunktionen, dels i den normale udgave, og dels med effektivitetsindeks.

For året 1995 estimeres der i papiret en K-effektivitetsvækstrate på –5.7% og en L-effektivitetsvækstrate på 3.9% for nm-erhvervet, og det vises at dette svarer til en samlet produktivitetsvækst på 2.4%, idet K- og L-effektivitetsvækstraterne skal vejes sammen med omkostningsandelene for de respektive faktorer (16% hhv. 84% i 1995). Altså er der ikke noget teoretisk inkonsistent ved disse effektivitetsvækstrater, og det pointeres desuden i papiret, at man bør skelne mellem fysiske effektivitetsindeks (f.eks. rene maskineffektiviteter) og økonomiske effektivitetsindeks (som udover fysiske effekter også indeholder påvirkninger fra præferencer, institutioner, regler mv.). Det er de første, der ofte tales om og tænkes på, men det er de sidste, der estimeres!

Papiret danner grundlaget for papirerne EBJ+TTH 15.03.06: "Forslag til formulering af effektivitetsindeks i ADAMs faktorblok" samt TTH 16.03.06: "Törnqvistindeks og aggregeringsteori, herunder udvidelse med biased effektivitet/produktivitet".

Nøgleord: effektivitet, teknologi, faktorudvidende, (totalfaktor)produktivitet, bias

1. Indledning

Teknologiske fremskridt kan indbygges i en produktionsfunktion vha. faktorudvidende ikke-indbyggede effektivitetsindeks, som varierer med tiden *t*. I modsætning til hvad man måske umiddelbart skulle tro, kan det vises, at dette ikke indebærer noget tab af fleksibilitet. Derfor kan man vha. effektivitetsindeks approksimere en given produktionsfunktion lige så godt vha. effektivitetsindeks som vha. af andre former for tidstrender (f.eks. trends i omkostningsandele, faktorintensiteter mv.).[1]

Fordelen ved at bruge effektivitetsindeks ligger i den meget enkle (men til tider også vildledende, som vi skal se senere) fortolkning: at der sker en teknologiudvikling, som gør faktoren *x%* mere effektiv, så man alt andet lige ville kunne producere det samme, selv om man brugte *x%* mindre af faktoren. En anden fordel er, at man kan indbygge den samme slags effektivitetsindeks i en hvilken som helst produktions- eller omkostningsfunktion, hvilket gør det nemmere at sammenligne forskellige funktionsformer i forhold til hinanden (f.eks. CES, generaliseret Leontief, translog osv.).

En ulempe ved effektivitetsindeks er, at den intuitive fortolkning måske kan lede lidt på vildveje, hvis der er tale om teknologisk betinget substitution mellem to faktorer (såkaldte biased tekniske fremskridt). I ADAM kan man i den historiske periode i de fleste erhverv observere, at kapitalapparatet stiger kraftigt (typisk kraftigere end produktionen, svarende til stigende K/Y-forhold), mens arbejdstimeforbruget er nogenlunde konstant (svarende til faldende L/Y-forhold). Hvis der ses bort fra effekter fra de relative faktorpriser er forklaringen formentlig den, at teknologiudviklingen for givet Y sparer på arbejdskraften ved til gengæld at bruge mere kapital.

Når der estimeres på ADAM-tal indebærer dette fænomen, at kapitaleffektiviteten har det med at *falde* i den historiske periode (mens arbejdskrafteffektiviteten til gengæld stiger). Dette fald kan forekomme mærkeligt, for hvordan skal man forestille sig tekniske *tilbageskridt* (eller "nedfindelser") i kapitalteknologien?

Svaret er, at kapitaleffektiviteten ikke bør betragtes isoleret fra arbejdskrafteffektiviteten (eller energi- og materiale-effektiviteten for den sags skyld). Man bør opfatte det på den måde, at den sammenvejede effektivitetsvækst for kapital og arbejdskraft tilsammen er positiv, men at denne (tilsammen) positive effektivitetsudvikling har et bias i retning af at være kapitalforbrugende og arbejdskraftbesparende. I dette papir forsøges dette fænomen uddybet og forklaret.

[1] Jf. Thomsen (2000): "Short cuts to dynamic factor demand modelling", *Journal of Econometrics.*

2. Hvilket produktivitetsbegreb?

Produktivitet kan måles på mange måder, og vi vil her følge Solow's oprindelige tankegang: hvad ville der være sket med væksten, hvis teknologien ikke havde udviklet sig? Først analyseres dette helt generelt for en vilkårlig produktionsfunktion, og senere vil disse resultater blive belyst med translog-omkostningsfunktionen som case, da parametrene er nemme at fortolke.

Den mest oplagte udlægning af Solow's spørgsmål vil være at forestille sig en udgangssituationen (0) og to efterfølgende situationer: én hvor der går et år uden teknologiske fremskridt (A), og én hvor de er med (B). I disse to situationer antages omkostningerne at være ens, og man kan forestille sig denne budgetrestriktion som de ressourcer, samfundet har til rådighed (hvor det naturligvis står producenterne frit for at substituere mellem produktionsfaktorerne, så længe "budgetrestriktionen" overholdes).

Vi antager følgende omkostningsfunktion:

$$C = \mathrm{C}(Y, P_1 ... P_n, t) \tag{1.1}$$

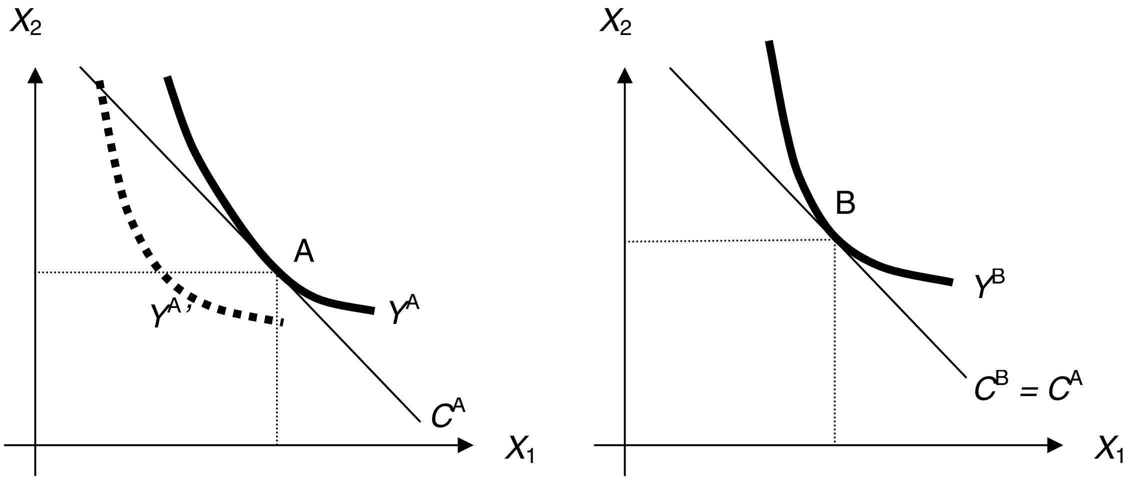
Givet at denne har de sædvanlige egenskaber (prishomogenitet osv.), hører der en dual produktionsfunktion $Y = \mathrm{F}(X_1, ... X_n, t)$ til denne. I udgangssituationen er der omkostningerne C^0 givet produktionen Y^0 og faktorpriserne $P_1{}^0 ... P_n{}^0$, mens der året efter uden tekniske fremskridt vil være omkostningerne $C^A = \mathrm{C}(Y^A, P_1{}^A ... P_n{}^A, t)$, mens de med tekniske fremskridt er $C^B = \mathrm{C}(Y^B, P_1{}^B ... P_n{}^B, t+1)$. Bemærk at teknologiindekset t er uændret i A, mens der lægges én til i B.

Vi sætter nu $C^A = C^B$ (budgetrestriktionen), og da faktorpriserne antages ens i A og B kan vi skrive følgende:

$$\mathrm{C}(Y^A, P_1^B ... P_n^B, t) = \mathrm{C}(Y^B, P_1^B ... P_n^B, t+1) \tag{1.2}$$

Hvis man kender Y^B og $P_1{}^B ... P_n{}^B$ kan disse indsættes på højresiden, og Y^A kan så findes implicit ud fra venstresiden. Herved får man at vide, hvordan produktionen havde udviklet sig, hvis teknologiindekset t var forblevet uændret og omkostningerne (og priserne) var de samme.

Figur 1. Et mål for produktivitetsvæksten: hvor meget kan *Y* ændre sig givet at omkostningerne holdes konstante?



Produktivitetsbegrebet kan illustreres som ovenfor. I figuren (venstre) sker der en forbedring af produktiviteten, så isokvantren rykker mod sydvest (Y^{A} til Y^{A}'). Hvis omkostningerne skal være de samme i A og B, kan der produceres mere end dette (nemlig Y^{B}, højre figur). Forskellen på Y^{A} og Y^{B} kan således siges at være udtryk for produktivitetsvæksten. Bemærk at punktet A (venstre) og B (højre) ligger forskellige steder på isokost-linjen, hvilket kan tages som udtryk for produktivitetens *bias*.

Formel (1.2) kan alternativt differentieres til følgende:[2]

$$\mathrm{C}'_Y \mathrm{d}\log(Y^A) + \sum_i \mathrm{C}'_{P_\mathrm{i}} \mathrm{dlog}(P_\mathrm{i}) \quad = \quad \mathrm{C}'_Y \mathrm{dlog}(Y^B) + \sum_i \mathrm{C}'_{P_\mathrm{i}} \mathrm{dlog}(P_\mathrm{i}) + \mathrm{C}'_t \mathrm{d}t \tag{1.3}$$

Bemærk at der ikke på venstresiden er nogen *t*-effekt (*t* ændrer sig ikke fra situation 0 til situation A), mens det skal bemærkes at højresidens C'_t er defineret som dlog(*C*)/d*t* (i modsætning til de andre afledte, som er af formen dlog(*C*)/dlog(*X*)). Da prisudviklingen er den samme fra 0 til A som fra 0 til B, kan (1.3) reduceres til:

$$\mathrm{C}'_Y \mathrm{d}\log(Y^A) = \mathrm{C}'_Y \mathrm{dlog}(Y^B) + \mathrm{C}'_t \mathrm{d}t \tag{1.4}$$

eller

$$rtp = \frac{\mathrm{d}\log(Y^\mathrm{B}) - \mathrm{dlog}(Y^\mathrm{A})}{\mathrm{d}t} = -\frac{\mathrm{C}'_t}{\mathrm{C}'_Y} \tag{1.5}$$

Variablen *rtp* står her for "rate of technical progres". Den ekstra produktionsvækst i B i forhold til i A kan altså udtrykkes som minus forholdet

---

[2] Vi går her over i kontinuert tid, dvs. ser på en infinitesimal ændring i *t* (skriv $t + \varepsilon$ i stedet for t+1 på højresiden i (1.2)). For t+1 (dvs. i diskret tid) gælder formlen kun tilnærmelsesvist.

mellem omkostningernes teknologiafhængighed og omkostningernes produktionsafhængighed.

Man kan godt forestille sig alternative produktivitetsbegreber, herunder

1. Omkostningstrenden C_t'. Dette svarer til kun at se på tælleren i (1.5) og udtrykker, hvad omkostningerne ville falde med i løbet af en periode, hvis priser og produktion blev holdt konstant. Givet konstant skalaafkast er der ingen forskel i forhold til *rtp*-formlen (1.5), bortset fra fortegnet, og derfor bruges omkostningseffektiviteten meget i dette papir.
2. Naivt teknisk mål. Dette svarer til at sammenligne $Y^A = F(X_1, \dots, X_n, t)$ med $Y^B = F(X_1, \dots, X_n, t+1)$, for givne $X_1, \dots, X_n$. Problemet med dette "tekniske" mål er, at hvis den tekniske udvikling fra t til t+1 er biased, ville man kunne producere Y^B med en billigere kombination af $X_1, \dots, X_n$. Derfor kan dette mål nemt lede på afveje, da der ikke garanteres omkostningsminimerende adfærd fra producenternes side, hvorfor begrebet ikke kan anbefales.
3. Divisia-index. Formuleret i diskret tid kan man skrive dette indeks som $\mathrm{Dlog}(Y_{\mathrm{DIV}}) = \Sigma\ (s_i+s_i(-1))/2 \cdot \mathrm{Dlog}(X_i)$, hvor s_i er omkostningsandele og X_i er faktorinputs. Man kan vise, at dette indeks er superlativt og eksakt, hvis den bagvedliggende produktionsfunktion er af translog-typen.[3] Man kan så sammenligne den faktiske Y med Divisia's Y og kalde forskellen for "produktiviteten". Problemet med dette er bare, at der i Divisia-produktiviteten forudsættes, at de tekniske fremskridt er ikke-forvridende, og det er netop forvridningseffekterne vi gerne vil forstå bedre, jf. også diskussionen af det forvridningsudvidede Törnqvist-indeks i papiret TTH 16.03.06.

I ADAM opereres der med konstant skalaafkast i alle modellens produktionsfunktioner, og derfor vil der i store dele af dette papir ikke blive skelnet mellem *rtp* og C_t' (som givet konstant skalaafkast er ens, bortset fra fortegnet). I forbrugssammenhæng er "konstant skalaafkast" (dvs. homotetiske præferencer) imidlertid en meget mindre plausibel antagelse, hvilket forfatteren håber at vende tilbage til i et senere papir om forbrugssystemer og såkaldte "nytteeffektiviteter".

[3] Ikke en translog-omkostningsfunktion, men en translog-produktionsfunktion: dvs. en kvadratisk form med log(Y) på venstresiden og log(X_i)'er på højresiden.

3. Translog-omkostningsfunktionen

For at gøre disse begreber mindre abstrakte vises det i det følgende, hvordan den førnævnte *rtp*-sammenhæng tager sig ud for en konkret omkostningsfunktion, nemlig translog-omkostningsfunktionen. Denne er defineret som følger:[4]

$$\begin{aligned}\log(C) = a_0 + a_y \log(Y) + \sum_i a_i \log(P_i) + a_t t + 0.5\sum_j \sum_i b_{ij} \log(P_i)\log(P_j) \\ + \sum_i b_{yi} \log(Y)\log(P_i) + 0.5 a_{yy} (\log(Y))^2 + \sum_i b_{ti} t \log(P_i) \\ + b_{ty} t \log(Y) + 0.5 a_{tt} t^2 \qquad (1.6)\end{aligned}$$

$$s_i = \frac{\mathrm{dlog}(C)}{\mathrm{dlog}(P_i)} = a_i + \sum_j b_{ij} \log(P_j) + b_{yi} \log(Y) + b_{ti} t \qquad (1.7)$$

Omkostningsandelene kaldes s_i. Der gælder, at $\Sigma\, a_i = 1$, $\Sigma\, b_{ij} = 0$, $\Sigma\, b_{ji} = 0$, $\Sigma\, b_{yi} = 0$, $\Sigma\, b_{ti} = 0$, $b_{ij} = b_{ji}$. Parametrene b_{yi} er udtryk for forvridende skalaeffekter, mens parametrene b_{ti} på lignende måde er et udtryk for de teknologisk fremskridts *bias*. Hvis b_{ti} er positiv siger man, at teknologien er input-forbrugende for den pågældende faktor (alternativt er teknologien neutral eller input-besparende).

Omkostningerne afhænger af produktionen som det fremgår nedenfor. Denne variabel kaldes undertiden *omkostningsfleksibiliteten*.[5]

$$C'_y = \frac{\mathrm{dlog}(C)}{\mathrm{dlog(Y)}} = a_y + a_{yy}\log(Y) + \sum_i b_{yi} \log(P_i) + b_{ty}\, t \qquad (1.8)$$

Omkostningerne afhænger af tidsindekset t som det fremgår nedenfor. Denne variabel kan man måske passende kalde *omkostningstrenden*, idet den måler hvor meget omkostningerne ville falde med i løbet af et år, hvis produktion og faktorpriser ikke ændrede sig.

$$C'_t = \frac{\mathrm{dlog}(C)}{\mathrm{d}t} = a_t + a_{tt} t + \sum_i b_{ti} \log(P_i) + b_{ty} \log(Y) \qquad (1.9)$$

Sidstnævnte variabel forventer man typisk er negativ, da man ellers har tekniske *tilbageskridt*. Bemærk at hvis b_{ti} er positiv (teknologien er input-forbrugende for den pågældende faktor), så vil C'_t stige, hvis prisen på den pågældende faktor stiger. Noget lignende gør sig gældende for omkostningsfleksibiliteten C'_y hvis b_{yi} er positiv.

Der kan pålægges yderligere restriktioner hvad angår skalaeffekter:

---

[4] For en glimrende gennemgang af denne, se PBR 26.04.92.

[5] Jf. *Handbook of Econometrics*, s. 1886.

- *Homotecitet* (lineære ekspansionsveje) kræver at $b_{yi} = 0$.[6] Det betyder, at forholdet mellem produktionsfaktorerne er uændret, når produktionen ændres for alle Y, P_i, t.[7]
- Hvis der yderligere kræves *homogenitet* i produktionsfunktionen, skal omkostningsfleksibiliteten (1.8) være konstant for alle Y, P_i, t, hvilket den kun kan være hvis desuden $a_{yy} = b_{ty} = 0$. (I dette tilfælde er produktionsfunktionens skalagrad $1/a_y$).
- Hvis der yderligere kræves *konstant skalaafkast,* skal omkostningsfleksibiliteten (1.8) være lig én for alle Y, P_i, t. Det er den kun hvis desuden $a_y = 1$.

Mht. trendeffekter gælder der følgende:

- Trendeffekterne er Hicks-neutrale (ikke-forvridende), når $b_{ti} = 0$. Hicksneutralitet betyder, at forholdet mellem produktionsfaktorerne er uændret, når tidsindekset ændres.[8]

Ud fra (1.8) og (1.9) kan de tekniske fremskridt *rtp*, som defineret i (1.5), skrives som følger:

$$rtp = -\frac{a_t + a_{tt}t + \sum_i b_{ti}\log(P_i) + b_{ty}\log(Y)}{a_y + a_{yy}\log(Y) + \sum_i b_{yi}\log(P_i) + b_{ty}\, t} \qquad (1.10)$$

Hvis variablerne er defineret som $P_i = 1$ og $t = 0$ i et givet basisår (f.eks. 1995), vil *rtp* være lig $-a_t/a_y$ i dette år, men for andre år afhænger den af både t, Y og P_i. Formen reducerer til følgende givet en produktionsfunktion med homogenitetsgrad ($1/a_y$).

$$rtp = -\left(a_t + a_{tt}t + \sum_i b_{ti}\log(P_i)\right)\frac{1}{a_y} \qquad (1.11)$$

---

6 At ekspansionsvejene er lineære svarer til, at $\mathrm{dlog}(X_i)/\mathrm{dlog}(Y) = \mathrm{dlog}(X_j)/\mathrm{dlog}(Y)$ for alle i og j. Da det huskes at $X_i = s_iC/P_i$ ses det nemt, at dette krav er ækvivalent med, at $\mathrm{dlog}(s_i)/\mathrm{dlog}(Y) = \mathrm{dlog}(s_j)/\mathrm{dlog}(Y)$. Ud fra (1.7) ses det, at dette kræver at $b_{yi}/s_i = b_{yj}/s_j$, hvilket kræver at alle $b_{yi} = 0$.

7 Det formelle krav er, at $C = \mathrm{C}(Y, P_1, \ldots, P_n, t)$ kan skrives som $C = \mathrm{C}_1(Y, t)\cdot\mathrm{C}_2(P_1, \ldots, P_n, t)$. Derved fås lineære ekspansionsveje. PBR har en yderligere restriktion mht. homotecitet: nemlig at $b_{ty} = 0$. Dette svarer til, at $C = \mathrm{C}_1(Y)\cdot\mathrm{C}_2(P_1, \ldots, P_n, t)$ og er så vidt jeg kan se et unødvendigt krav hvad angår homotecitet. Måske har PBR og andre overset, at t godt kan stå i både $\mathrm{C}_1()$ og $\mathrm{C}_2()$? I hvert fald *er* ekspensionsvejene lineære, selvom $b_{ty} \neq 0$. Dette kan måske bedre indses, hvis man omskriver leddene $a_y\log(Y) + b_{ty}t\log(Y)$ til $(a_y + b_{ty}t)\log(Y)$, hvorved det ses, at man kan vælge at fortolke b_{ty} som en slags trend i a_y-parameteren (dvs. trend i skalagraden), hvorfor den ikke kan være faktorforvridende.

8 Her har PBR igen restriktionen $b_{ty} = 0$, formentlig ud fra et lignende ræsonnement som i foregående fodnote, altså denne gang at $C = \mathrm{C}_1(t)\cdot\mathrm{C}_2(P_1, \ldots, P_n, Y)$. Men Hicks-neutralitet kan opnås med det svagere krav $C = \mathrm{C}_1(Y, t)\cdot\mathrm{C}_2(P_1, \ldots, P_n, Y)$, hvor Y optræder i både $\mathrm{C}_1()$ og $\mathrm{C}_2()$ og der derfor gælder, at $b_{ty} \neq 0$. Da man kan omskrive leddet $a_t t + b_{ty}t\log(Y)$ til $(a_t + b_{ty}\log(Y))\,t$, kan man denne gang vælge at fortolke b_{ty} som en slags Y-effekt i a_t-parameteren.

hvor Y-afhængigheden er forsvundet. Og til følgende hvis der antages konstant skalaafkast:

$$rtp = -\left(a_t \;\; + a_{tt} t \; + \sum_i b_{ti} \; \log(P_i) \;\; \right) \tag{1.12}$$

Så selv i dette specielle tilfælde kommer man altså ikke uden om, at produktivitetsvækstraten afhænger af udviklingen i de relative faktorpriser, givet at der er faktorforvridende trender i produktionsfunktionen. Hvis man undrer sig over dette, kan man konsultere Appendiks B.

Hvis tillige trenderne er ikke-forvridende, reducerer formlen til:

$$rtp = -\,(a_t \;\; + a_{tt} t) \tag{1.13}$$

Nu afhænger produktiviteten så kun af tiden t.

4. Translog-funktionens trender omskrevet til effektivitetsindeks

Translog-omkostningsfunktionen er en såkaldt fleksibel funktionsform (FFF), som kan approksimere en vilkårlig omkostningsfunktion (og dermed produktionsfunktion) med andenordens-tilnærmelse (tænk på det som en andenordens Taylor-approksimation). I den forstand er translog-omkostningsfunktionen fuldt tilstrækkelig til at belyse f.eks. tekniske fremskridt.

Der findes dog en anden parametrisering af translog-omkostningsfunktionen, som rent fortolkningsmæssigt kan have sine fordele. Denne parametrisering er matematisk identisk med standard-translog'en og fremkommer ved at tage en barberet ("stripped down") translog-omkostningsfunktion med konstant skalaafkast og uden trender og tilsætte effektivitetsindeks af formen e_i = $\mathrm{e_i}(t, Y)$. Man kan så få en del ud af at se på sammenhængene mellem standard-translog-parametrene og parametrene i effektivitetsindeksene $\mathrm{e_i}()$.

Med konstant skalaafkast og uden trender har vi følgende ("stripped down") omkostningsfunktion:

$$\log(C) = a_0 + \log(Y) + \sum_i a_i \log(P_i) \;+\; 0.5 \sum_j \sum_i b_{ij} \log(P_i) \log(P_j) \tag{1.14}$$

$$s_i \;=\; \frac{\mathrm{dlog}(C)}{\mathrm{dlog}(P_i)} \quad = a_i \;+\; \sum_j b_{ij} \;\log(P_j) \tag{1.15}$$

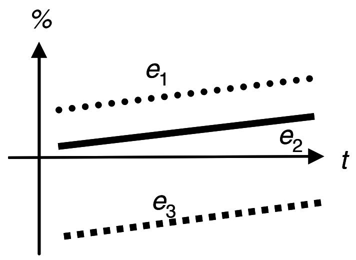
$$\Sigma\, a_i = 1, \;\; \Sigma\, b_{ij} = 0, \;\; \Sigma\, b_{ji} = 0, \;\; b_{ij} = b_{ji}$$

Vi udvider nu denne med effektivitetsindeks af følgende form:

$$\log(e_i) = \omega_i t + 0.5\,\overline{\omega} t^2 \quad + \psi_i \log(Y) + 0.5\,\overline{\psi}\,(\log(Y))^2 \quad + \phi\, t \log(Y) \tag{1.16}$$

Disse kan måske se lidt voldsomme ud, men er sådan set bare en kvadratisk form i t og Y. Man kan starte med at abstrahere fra alt andet end de to første led, svarende til at effektivitetsvæksten er $\omega_i + \bar{\omega} t$. Altså at effektivitetsvæksten er forskellig for de forskellige inputs, men at denne ændrer sig med samme antal procentpoints pr. år.

Figur 2. Effektivitetsindeks som defineret i (1.16)



Effektivitetsindeksene går ind i en omkostningsfunktion ved at blive divideret op i faktorpriserne:[9]

$$\log(C) = a_0 + \log(Y) + \sum_i a_i \log\left(\frac{P_i}{e_i}\right) + 0.5 \sum_j \sum_i b_{ij} \log\left(\frac{P_i}{e_i}\right) \log\left(\frac{P_j}{e_j}\right) \quad (1.17)$$

$$s_i = a_i + \sum_j b_{ij} \log\left(\frac{P_j}{e_j}\right) \quad (1.18)$$

$$\Sigma\, a_i = 1,\ \Sigma\, b_{ij} = 0,\ \Sigma\, b_{ji} = 0,\ b_{ij} = b_{ji}$$

Da (logaritmen til) effektiviteterne bliver ganget sammen i det sidste led i (1.17), skulle man tro at den resulterende omkostningsfunktion bl.a. ville have led med t^4 og $(\log(Y))^4$, men pga. parameterrestriktionerne på b_{ij}'erne og de restrikterede andenordensled i (1.16) er dette ikke tilfældet. Vi ender faktisk med en funktion af samme form som (1.6), dvs. højst andenordensled.

I det følgende vil vi derfor se på den ganske interessante sammenhæng mellem parametrene i den almindelige translog-funktion og den effektivitetsudvidede translog (1.17). Hvis vi definerer

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} a_1 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix}, \quad \mathbf{B} = \begin{pmatrix} b_{11} & \cdots & b_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ b_{n1} & \cdots & b_{nn} \end{pmatrix}, \quad \mathbf{B}_t = \begin{pmatrix} b_{t1} \\ \vdots \\ b_{tn} \end{pmatrix}, \quad \mathbf{B}_y = \begin{pmatrix} b_{y1} \\ \vdots \\ b_{yn} \end{pmatrix} \quad (1.19)$$

$$\mathbf{\Omega} = \begin{pmatrix} \omega_1 \\ \vdots \\ \omega_n \end{pmatrix}, \quad \mathbf{\Psi} = \begin{pmatrix} \psi_1 \\ \vdots \\ \psi_n \end{pmatrix} \quad (1.20)$$

[9] Dette følger af, at faktorefterspørgslerne kan skrives som $X_i = 1/e_i\, \mathrm{X}_i(Y, P_1/e_1, \ldots P_n/e_n)$, hvorfor omkostningerne kan fås som $C = \Sigma\, P_i X_i = (P_1/e_1)\, \mathrm{X}_1(Y, P_1/e_1, \ldots P_n/e_n) + \ldots + (P_n/e_n)\, \mathrm{X}_n(Y, P_1/e_1, \ldots P_n/e_n)$, hvilket netop er omkostningsfunktionen evalueret for *effektive* priser.

kan det vises, at (1.17) er identisk med (1.6), givet følgende parameter-sammenhænge:[10]

$$\mathbf{B}_t = -\mathbf{B}\,\mathbf{\Omega}$$
$$a_t = -\mathbf{\Omega}'\mathbf{A}$$
$$a_{tt} = -\overline{\omega} + \mathbf{\Omega}'\mathbf{B}\,\mathbf{\Omega}$$

$$\mathbf{B}_y = -\mathbf{B}\,\mathbf{\Psi}$$
$$a_y = 1 - \mathbf{\Psi}'\mathbf{A}$$
$$a_{yy} = -\overline{\psi} + \mathbf{\Psi}'\mathbf{B}\,\mathbf{\Psi}$$

$$b_{ty} = -\overline{\phi} + \mathbf{\Psi}'\mathbf{B}\,\mathbf{\Omega}$$

4.1 Tofaktor-tilfældet med konstant skalaafkast

Hvordan skal nu disse sammenhænge forstås? For at gøre det lidt nemmere at overskue, vil vi i det følgende antage konstant skalaafkast og derfor kun se på trend-effekterne. Desuden vil vi holde os til tofaktor-tilfældet med K og L som de to faktorer. Det huskes fra tidligere, at omkostningstrenden og omkostningsandelene er givet som følger givet konstant skalaafkast:

$$C'_t = \frac{\mathrm{dlog}(C)}{\mathrm{d}t} = a_t + a_{tt}t + \sum_i b_{ti}\log(P_i) \tag{1.21}$$

$$s_i = \frac{\mathrm{dlog}(C)}{\mathrm{dlog}(P_i)} = a_i + \sum_j b_{ij}\log(P_j) + b_{ti}t \tag{1.22}$$

Altså kan a_t og a_{tt} forstås som niveau hhv. trend i omkostningstrenden, mens b_{ti}'erne er lineære trender i omkostningsandelene. Med kun to faktorer gælder der følgende sammenhænge mellem effektivitetsparametrene og de ”normale” translog-parametre:

$$\begin{pmatrix} b_{t1} \\ b_{t2} \end{pmatrix} = -\begin{pmatrix} b_{11} & -b_{11} \\ -b_{11} & b_{11} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \omega_1 \\ \omega_2 \end{pmatrix} \tag{1.23}$$

$$a_t = -\begin{pmatrix} \omega_1 & \omega_2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a_1 \\ 1-a_1 \end{pmatrix} \tag{1.24}$$

$$a_{tt} = -\overline{\omega} + \begin{pmatrix} \omega_1 & \omega_2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} b_{11} & -b_{11} \\ -b_{11} & b_{11} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \omega_1 \\ \omega_2 \end{pmatrix} \tag{1.25}$$

---

[10] Thomsen (2000) og også KTH 07.12.93: ”Teknologiske fremskridt i translog- og CES-produktionsfunktionerne.”

Som kan reduceres til følgende:

$$b_{t1} = -b_{11}(\omega_1 - \omega_2) \tag{1.26}$$
$$b_{t2} = b_{11}(\omega_1 - \omega_2) \tag{1.27}$$
$$a_t = -\left[a_1\omega_1 + (1-a_1)\omega_2\right] \tag{1.28}$$
$$a_{tt} = -\bar{\omega} \quad + b_{11}(\omega_1 - \omega_2)^2 \tag{1.29}$$

Bemærk at de to b_t'er summer til 0. Det lønner sig her at antage, at variablerne er skaleret således at faktorpriserne er 1 og t er 0 i basisåret 1995. Denne skalering kan foretages uden tab af generalitet, og det indebærer bl.a., at a_1 kan fortolkes som *K*'s omkostningsandel i 1995, jf. (1.22). Endvidere gælder der, at b_{11} typisk er > 0 på danske tal (svarende til at substitutionselasticiteten mellem *K* og *L* er < 1).[11] Desuden er det klart, at b_{t1} typisk estimeres til at være > 0, eftersom der historisk har været en positiv trend i kapitalens omkostningsandel. Endelig må vi også forestille os, at a_t er < 0, for ellers har omkostningstrenden (1.21) forkert fortegn i basisåret.

Ud fra ovenstående antagelser følger det af (1.26), at $\omega_1 < \omega_2$, da b_{11} og b_{t1} er positive. Så væksten i kapitalens effektivitetsindeks må nødvendigvis være mindre end væksten i arbejdskraftens effektivitetsindeks, hvis substitutionselasticiteten mellem *K* og *L* er mindre end én og der er positiv trend i kapitalens budgetandel. Men hvor lille kan ω_1 så være, og kan den gå hen og blive negativ?

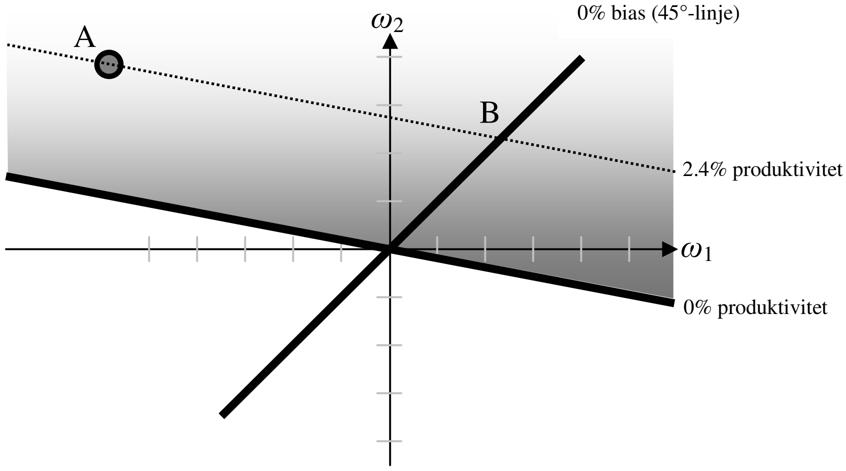
Ifølge (1.28) er a_t givet som $-(a_1\ \omega_1 + (1-a_1)\ \omega_2)$, og da a_t skal være negativ, giver det følgende nødvendige sammenhæng mellem ω_1 og ω_2:

$$\omega_1 > -\frac{1-a_1}{a_1}\omega_2 \tag{1.30}$$

Hvis vi for eksempel forestiller os at *K*'s omkostningsandel er 16% i basisåret (1995) og ω_2 er 0.039 (svarende til at *L*-effektiviteten stiger med 3.9% p.a.), så kræver betingelsen $a_t < 0$ at ω_1 er større end –0.21 (–21% p.a.). Altså vil *K*-effektiviteten være teoretisk konsistent i basisåret, givet at denne holder sig over –21% p.a. Disse og de følgende parameter-eksempler er alle taget fra afsnit 5 (illustrativ estimation af *nm*-erhvervet) og er i den forstand ”realistiske”.

[11] Der gælder i tofaktor-tilfældet, at $\sigma = 1 - b_{11}/[a_1(1-a_1)] \quad \leftrightarrow \quad b_{11} = (1-\sigma)\cdot a_1\,(1-a_1)$ i det givne basisår. (Husk her, at σ ikke er konstant over tid i translog-omkostningsfunktionen).

Figur 3. Det konsistente område for de to effektivitetsindeks



I figuren ovenfor er konsistensområdet afbilledet for de konkrete parameterværdier, og de to akser er effektivitetsvækstraterne for *K* hhv. *L*. Langs 45°-linjen er disse vækstrater ens, hvilket svarer til ikke-forvridende (unbiased) tekniske fremskridt. Nordvest for 45°-linjen gælder der, at *K*/*L*-forholdet og *K*'s omkostningsandel stiger over tid (og vice versa sydøst for 45°-linjen).

Desuden er sammenhængen i (1.30) tegnet ind: dvs. de kombinationer af effektivitetsvækstrater, som giver en samlet positiv produktivitet (markeret med gråt). For eksempel ses det, at man nødvendigvis ryger ind i det inkonsistente område, hvis begge effektivitetsvækstraterne er negative. Det ses også, at linjen svarende til 0% produktivitet er relativt flad, hvilket skyldes kapitalens beskedne omkostningsandel. Punktet A betegner de konkret estimerede effektivitetsvækstrater (–5.7% og + 3.9%) i basisåret 1995, og der er desuden indtegnet de kombinationer af effektivitetsvækstrater, som giver en samlet produktivitet på 2.4% (prikket linje).

Det ses, at der er mange andre kombinationer af effektivitetsvækstrater, som giver en samlet produktivitet på 2.4%, f.eks. punktet B, hvor de tekniske fremskridt er ikke-forvridende (her bliver begge effektivitetsvækstraterne så 2.4%). Men af figuren fremgår, at punktet A holder sig pænt inden for det grå område, og som tidligere nævnt skulle man flytte punktet meget langt mod venstre (helt ud til en K-effektivitetsvækstrate på –21%), før man ville få en samlet negativ produktivitetsudvikling i 1995.

Hvis vi i tråd med ovenstående (og i tråd med estimationerne i afsnit 5) forestiller os, at $\omega_1 = -0.057$, $\omega_2 = 0.039$, $b_{11} = 0.044$ og $a_1 = 0.16$ (b_{11}-værdien svarer til en substitutionselasticitet på ca. 0.67 i 1995), vil det ifølge (1.26)-(1.29) svare til translog-parametrene $b_{t1} = 0.0042$ og $a_t = -0.024$. Altså vil der være en årlig trend på 0.42%-points i kapitalens omkostningsandel, mens de samlede omkostninger falder med 2.4% i basisåret 1995, som følge af de tekniske fremskridt. Det leder til følgende konklusion:

Konklusion 1
Hverken de 0.42%-points årlig stigning i kapitalens omkostningsandel eller vækstraten på 2.4% i den samlede produktivitet ville få mange til at løfte øjenbrynene, men oversat til effektivitetsindeks svarer disse to tal altså til, at vækstraten i kapitaleffektiviteten er –5.7% i 1995 (mens den for arbejdskraften er 3.9%).

Det skal afslutningsvist nævnes, at det i hele denne diskussion, herunder bla. konsistensområdet i Figur 3, er forudsat at der kun er de to produktionsfaktorer *K* og *L*. Hvis man udvidede med energi og materialer kunne man f.eks. godt acceptere, at effektivitetsvækstraterne for *både K* og *L* blev estimeret negative, hvis de blot blev estimeret tilstrækkeligt høje for *E* og *M* (særligt den sidste, som fylder meget). At man skal huske alle sine produktionsfaktorer før man bortdømmer eventuelle negative effektivitetsvækstrater er også meget relevant i EMMA-sammenhæng, hvor man principielt godt kan tillade negative effektivitetsvækstrater for alle de indgående energityper i et givet erhverv, hvis blot effektivitetsvækstraterne for *K*, *L* og *M* (i ADAM) opvejer dette. Fortolkningen af disse negative effektivitetsvækstrater ville blot være, at teknologiudviklingen har et bias i retning af at være generelt energiforbrugende.

4.2 Hvad med en *Y*-trend?

Det har været foreslået operere med en *Y*-trend, dvs. en produktionsfunktion af formen

$$Y = e_Y \ \mathrm{F}(e_1 X_1, ..., e_n X_n) \qquad (1.31)$$

Når der er konstant skalaafkast giver denne dog ikke rigtigt noget substantielt nyt, for man vil altid kunne indfortolke *Y*-effektiviteten som en fælleskomponent i $e_1, \ldots, e_n$. For (1.31) kan med konstant skalaafkast omskrives til

$$Y = \mathrm{F}(e_Y e_1 X_1, ..., e_Y e_n X_n) \qquad (1.32)$$

Det ses tydeligt, at e_Y ikke kan identificeres sammen med $e_1, \ldots, e_n$, idet enhver bevægelse i e_Y ville kunne modposteres i $e_1, \ldots, e_n$. I Figur 3 svarer indføjelse af en e_Y på 1% f.eks. til, at man fra punktet A (–5.7%, 3.9%) går ned til punktet (–6.7%, 2.9%) langs en 45°-linje mod sydvest. Altså at man når man sætter *Y*-effektiviteten til 1% skal trække 1 procentpoint fra *K*- og *L*-effektiviteterne for at få det samme. På denne måde kan godt "parkere" den negative *K*-effektivitetvækstrate ved at introducere en *Y*-effektivitet, men problemet er så bare, at vækstraten i sidstnævnte er nødt til at være negativ (–5.7% eller derunder).

Så *Y*-effektiviteten løser ikke rigtigt fortolkningsproblemerne, fordi nissen flytter med over i den nye formulering. Altså at man godt kan få en *K*-effektivitetsvækstrate på 0% i 1995, men at dette indebærer en *Y*-

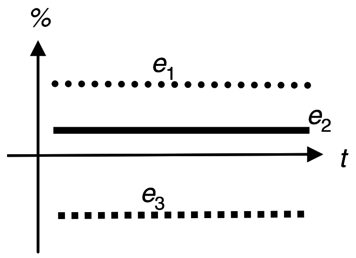
effektivitetsvækstrate på –5.7% parret med en L-effektivitetsvækstrate på 9.6%. Disse tal ville vel ikke være *nemmere* at forklare brugerne!

4.3 Specialtilfælde og lidt mere om sammenhængen mellem parametre

Den sidste translog-parameter a_{tt} (jf. formel (1.29)) kan man fortolke som den årlige ændring i den lineære trend-parameter a_t. Man kan ikke på forhånd sige noget om størrelsen af denne, fordi den frit kan styres af den ”frie” effektivitetsparameter $\bar{\varpi}$, som er hældningen på linjerne i Figur 2. Sidstnævnte kan f.eks. godt sættes så a_{tt} bliver = 0.

Af (1.29) fremgår i øvrigt det interessante fænomen, at selv om $\bar{\varpi}$ = 0 (lineære effektivitetsindeks, jf. figuren ovenfor), så bliver a_{tt} *ikke* lig nul, hvis effektivitetsvækstraterne har forskelligt niveau som i den følgende figur.[12]

Figur 4. Lineære effektivitetsindeks



Hvis f.eks. $b_{11} > 0$ (svarende til KL-substitutionselasticitet < 1) bliver a_{tt} altid positiv, hvis der er forskellige (lineære) effektivitetsvækstrater, hvilket igen kan fortolkes som, at a_t er stigende over tid. Dette svarer til, at produktivitetsvækstraten er aftagende over tid, og fortolkningen er, at der bruges mindre og mindre af den faktor, som har den hurtigste effektivitetsvækst, så den ”dårlige” faktor kommer til at fylde mere og mere i regnskabet. I det ovenstående regnestykke ville a_{tt} blive lig 0.00056, hvilket svarer til at produktivitetsvækstraten falder med 0.056%-points om året.

Cobb-Douglas-tilfældet

Når $\sigma = 1$ i tofaktortilfældet svarer det til, at $b_{11} = 0$ i translog-omkostningsfunktionen. I dette tilfælde ses det af (1.26), at $b_{t1} = 0$ uanset om der er niveauforskel i effektivitetsvækstraterne. Derimod er a_t uforandret, mens a_{tt} reducerer til $-\bar{\varpi}$.[13] Om Cobb-Douglas-tilfældet gælder der i øvrigt, at det ikke er muligt at identificere ω_1 og ω_2 ud fra (1.26) og (1.28). Når $b_{11} = 0$ er der således uendeligt mange (modsatrettede) kombinationer af ω_1 og ω_2, som tilfredsstiller (1.28). Derfor anbefales det ofte i litteraturen, at man i den almindelige translog-omkostningsfunktion sætter b_{ti}'erne til nul, når man

[12] Med mindre b_{11}= 0, svarende til Cobb-Douglas-tilfældet, og i dette tilfælde bør man alligevel ikke operere med forskellige effektivitetsvækstrater.
[13] Så hvis der *både* er lineære effektiviteter og $\sigma = 1$, forsvinder a_{tt}-leddet.

restrikterer b_{ij}'erne til nul.[14] Og det er i hvert fald nødvendigt, hvis man bagefter ønsker at kunne oversætte til effektivitetsparametre. Disse identifikationsproblemer er præcis grunden til, at men i CES-estimationer kan få meget besynderlige (modsatrettede) effektivitetsvækstrater, når σ er tæt på 1.

5. Illustrativ estimation

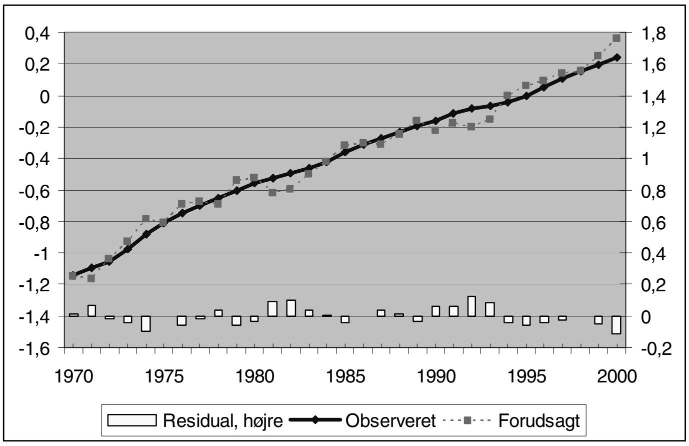
For at få nogle (estimerede) tal på bordet, estimeres i det følgende en translog-funktion for *K* og *L* over perioden 1970-2000 for *nm*-erhvervet. Der abstraheres her fra dynamik, så der er tale om rene langsigtssammenhænge.[15]

Med kun to produktionsfaktorer, og med konstant skalaafkast, kan man estimere følgende parametre (med LSQ i TSP):

```
Number of observations = 31        Log likelihood = 107.535
        Schwarz B.I.C. = -97.2331

                            Standard
 Parameter  Estimate         Error          t-statistic    P-value
 A0         10.8416         .010372         1045.31        [.000]
 A1         .157331         .168388E-02     93.4334        [.000]
 B11        .043960         .636110E-02     6.91073        [.000]
 AT         -.024180        .204471E-02     -11.8258       [.000]
 BT1        .423367E-02     .153506E-03     27.5798        [.000]
 ATT        .560329E-03     .189787E-03     2.95241        [.003]
```

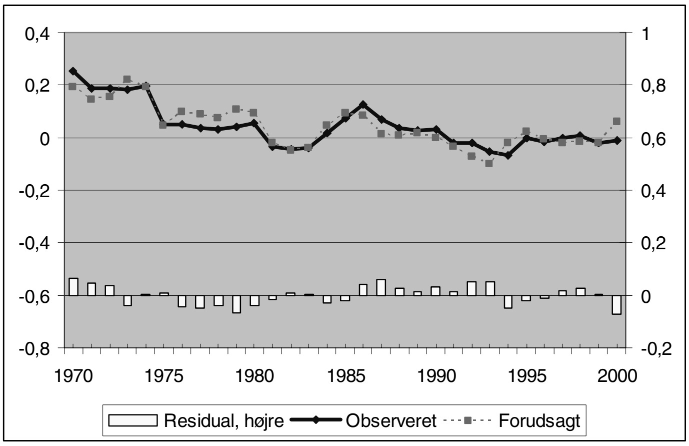
Figur 5. *K*, faktisk og beregnet



[14] Noget helt tilsvarende gælder for b_{yi}'erne. I dette afsnit abstraheres fra disse (der antages konstant skalaafkast).

[15] Der er tale om samme data, som ligger til grund for ADAMs nuværende ligninger. I data er P_K, P_L og Y normeret til 1 i 1995, mens t er normeret til 0 i 1995.

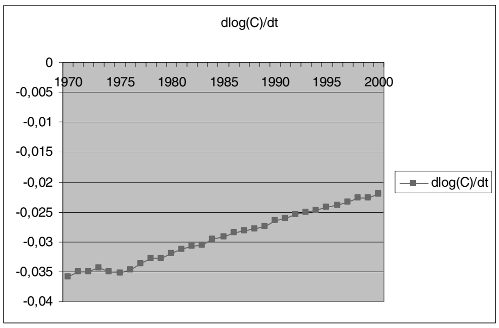
Figur 6. *L*, faktisk og beregnet



Da priserne er skaleret til at være lig 1 i 1995, er a_1 *K*'s (fittede) omkostningsandel i 1995, jf. (1.22). Substitutionen styres af b_{11} = 0.0439. Denne indebærer, at kapitalens og arbejdskraftens egenpriselasticiteter er –0.56 hhv. –0.11 i 1995. Substitutionselasticiteten er dermed 0.67 i 1995 (fås som minus summen af egenpriselasticiteterne). Denne substitutionselasticitet er i øvrigt ca. 0.40 i 1970 og stiger jævnt til ca. 0.70 i 2000.

Idet vi husker (1.21), kan vi se, at omkostningstrenden i 1995 er lig a_t, dvs. 2.42% (priserne er 1 i 1995, og *t* er 0). Hvis således produktion og faktorpriser var uforandrede, ville omkostningerne være faldet med 2.42% fra 1995 til 1996, som givet ud fra a_{tt} + a_{tt} *t*. Parameteren a_{tt} udtrykker, hvor meget denne procentsats ændres årligt (når der bortses fra effekter fra de relative faktorpriser), og da a_{tt} = 0.056% vil omkostningerne videre falde med 2.36% fra 1996 til 1997, med 2.31% fra 1997 til 1998 osv. Man kan tegne omkostningstrenden op som følger:

Figur 7. Omkostningstrenden (=reciprok "produktivitet")



Det ses, at denne er ret så lineær med en hældning svarende stort set til a_{tt}, men dog med lidt afvigelser hidrørende fra ændringer i de relative faktorpriser.

Vi kan i stedet forsøge at estimere translog-omkostningsfunktionen med effektivitetsindeks af formen (1.16). Det giver følgende parametre:

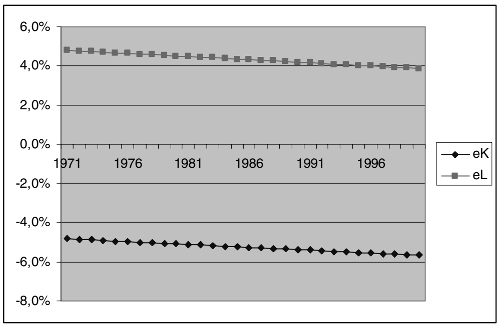
```
Number of observations = 31        Log likelihood = 107.535
         Schwarz B.I.C. = -97.2331

                                Standard
 Parameter   Estimate             Error          t-statistic    P-value
 OMEGA1      -.056975           .994385E-02     -5.72968        [.000]
 OMEGA2      .039333            .271051E-02     14.5111         [.000]
 OMEGA_BAR   -.152594E-03       .193496E-03     -.788620        [.430]
 A0          10.8416            .010372         1045.31         [.000]
 A1          .157331            .168388E-02     93.4334         [.000]
 B11         .043960            .636110E-02     6.91073         [.000]
```

Det bemærkes, at log likelihood som forventet er præcis den samme som før, hvilket også gælder parametrene a_0, a_1 og b_{11}. Faktiske og fittede værdier er ligeledes identiske i forhold til den forrige estimation, dvs. Figur 5 og Figur 6.

De tre ω-parametre styrer effektivitetsindeksene, og vækstraterne i 1995 kan aflæses direkte som ω_1 og ω_2 i tabellen ovenfor. Over perioden har der været følgende effektivitetsvækstrater:

Figur 8. De to effektivitetsindeks



Det ses her, at *K*'s effektivitet har været faldende (negativ vækstrate) over hele perioden, og at den i 1995 faldt med ca. 5.7%, mens *L*'s effektivitet steg med ca. 3.9%. Omkostningstrenden er den samme som i den forrige estimation (Figur 7), dvs. at der er positiv samlet produktivitetsudvikling i hele perioden, på trods af den negative vækst i *K*-effektiviteten.

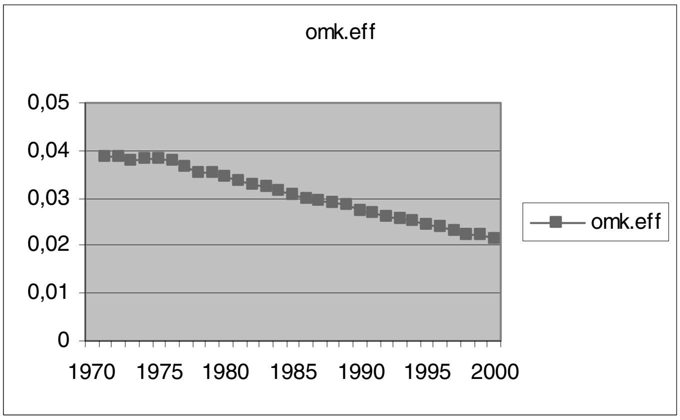
Omkostningseffektiviteten

Som et alternativ kan man vise den såkaldte ”omkostningseffektivitet”, hvor effektivitetsvækstraterne vejes sammen vha. (ønskede/fittede) omkostningsandele: s_1 Dlog(e_1) + s_2 Dlog(e_2). Rationalet for dette er, at med effektivitetsindeks er omkostningerne er givet som:[16]

$$C = \mathrm{C}\left(Y, \frac{P_1}{e_1}, ..., \frac{P_n}{e_n}\right) \tag{1.33}$$

Da vi ved fra Shephard’s Lemma i den logaritmiske udgave, at dlog(C)/dlog(P_i) = s_i, hvor s_i er omkostningsandelen, vil der naturligvis gælde, at dlog(C)/dlog(e_i) = $-s_i$, og heraf formlen s_1 Dlog(e_1) + s_2 Dlog(e_2) – denne gang i diskret tid. I denne er fortegnet vendt, så den kan fortolkes som produktivitet. Bortset fra det med fortegnet, er ”omkostningseffektiviteten” stort set identisk med forrige figur. Den eneste forskel er, at der i det første tilfælde regnes i kontinuert tid, mens der i det andet tilfælde regnes i diskret tid.

Figur 9. Omkostningseffektivitet

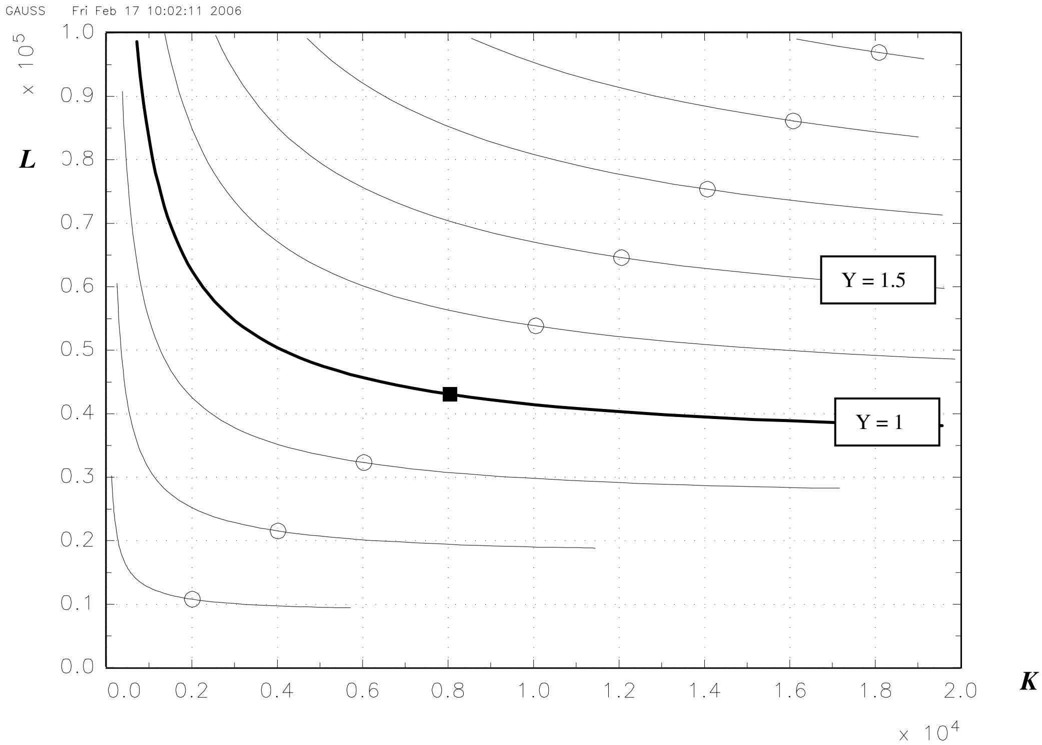


[16] Jf. evt. fodnote 9.

5.1 Illustrationer af isokvanternes bevægelser

Til sidst vil vi for endeligt at afmystificere det med den negative *K*-effektivitet vise de faktisk isokvanter fra de før viste estimationener.

Figur 10. Isokvanter for året 1995 (*t* = 0)

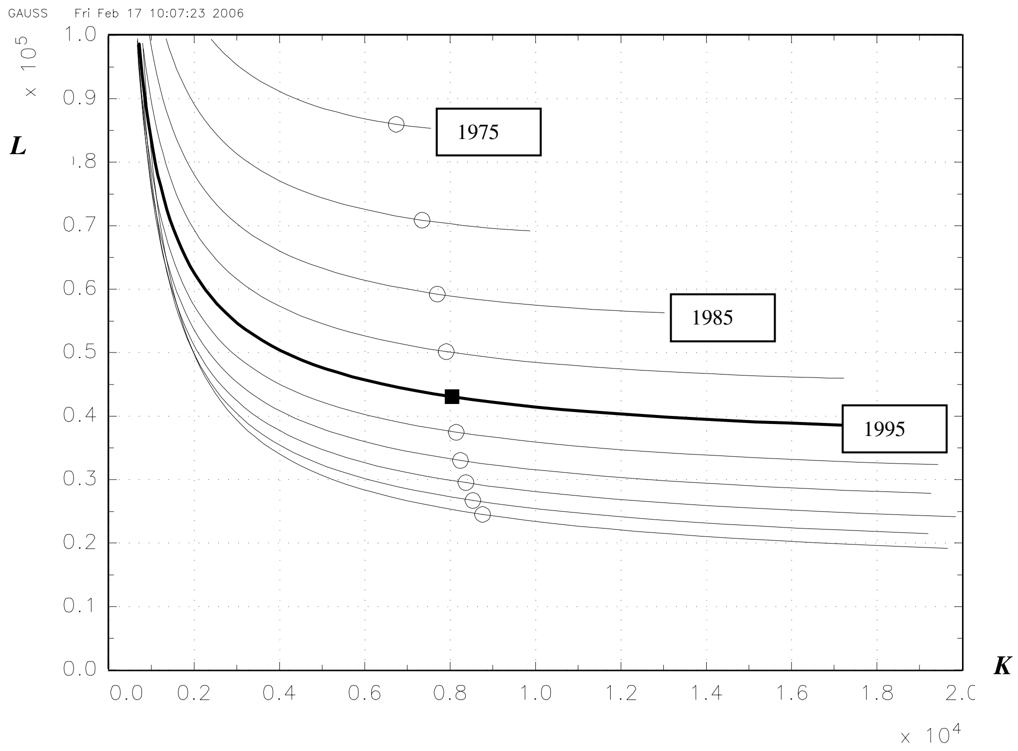


I figuren ovenfor er isokvanterne tegnet ind for *t* = 0, dvs. for året 1995. Det ses, at der er pålagt konstant skalaafkast, idet ekspansionsvejen ligger på en ret linje gennem origo, og der er lige langt mellem isokvanterne (som er indtegnet med mellemrum på 0.25 *Y*).

Cirklerne angiver den optimale faktorsammensætning givet $P_1/P_2 = 1$, svarende til priserne i 1995. Da $Y = 1$ i 1995 angiver den sorte firkant de forudsagte værdier for *K* og *L* i dette år, hvilket konkret er 8040 hhv. 43063.

Vi kan nu spørge, hvorledes isokvanten markeret med den sorte firkant i Figur 10 bevæger sig over tid, og dette er vist i den følgende figur.

Figur 11. En isokvants bevægelse over tid



Anm. Hver isokvant viser, hvor meget *K* og *L* der med det angivne års teknologi skulle bruges for at producere *Y*=1 (dvs. 1995-produktionen). Der er fem år mellem de viste isokvanter).

For 1995 er isokvanten identisk med den tilsvarende isokvant (med sort firkant) i Figur 10. Men ellers ses det, at isokvanten flytter nedad i takt med tiden.

For hver isokvant er der angivet den optimale sammensætning af *K* og *L* givet $P_1/P_2 = 1$. Cirklen på 1985-isokvanten viser altså, hvor meget input af *K* og *L* der ville være optimalt at bruge for med 1985-teknologi at producere $Y = 1$ (givet samme relative faktorpriser som i 1995).

Hvis vi tager udgangspunkt i firkanten på 1995-isokvanten og følger cirklerne nedad, kan man af figuren se, at givet uændret produktion og faktorpriser ville man år for år bruge mere og mere *K* og mindre og mindre *L*. Hvis man visualiserer isokostlinjerne som tangenterne i hvert cirkel-punkt ser man forholdsvist tydeligt, at de samlede omkostninger – som de skal – falder år for år (svarende til at isokostlinjerne flytter mod sydvest). Dette leder os til følgende konklusion:

Konklusion 2:
Der er intet inkonsistent ved den måde isokvanten flytter på i

Figur 11, selv om kapitaleffektivitetsvækstraten er negativ. At kapitaleffektivitetsvækstraten er negativ er blot et udtryk for, at den positive samlede produktivitetsudvikling (dvs. isokostlinjernes flytten mod sydvest) har et *bias* i retning af *K* (er kapitalforbrugende).

5.1 Forskellen på økonomiske og "fysiske" effektivitetsindeks

Til allersidst skal det nævnes, at der er en slags asymmetri i fortolkningen af effektivitetsindeksene. Der gælder nemlig, at hvis en faktors fysiske effektivitet bliver *x%* bedre, så slår dette også igennem på effektivitetsindekset med *x%*. Det kunne f.eks. være en olietype, som raffineres bedre så den indeholder flere Joule pr. liter end før. Hvis den bedre raffinerede olie kan bruges uden videre, vil en liter af den nye olie naturligvis svare til (1+*x*/100) liter af den gamle olie, og effektivitetsfortolkningen virker helt efter hensigten.

Men man kan ikke slutte den modsatte vej og konkludere, at fordi man kan estimere en effektivitetsudvikling for olie på *x%* p.a., så må oliens fysiske effektivitet være steget med x% p.a. over estimationsperioden. For der kan være mange andre grund til dette estimationsresultat end de rent "fysiske", herunder f.eks. at producenterne simpelthen bare har et tidsafhængigt bias i retning af at bruge mere elektricitet og mindre olie. Så de økonomiske effektivitetsindeks afhænger af meget andet end de "fysiske" effektivitetsindeks, herunder bl.a. præferencer, institutionelle forhold, regler, lovgivning o.m.a. Dette kan man formulere som, at

$$e_{Ø} = e_F \cdot e_P \cdot e_I \cdot \ \dots \ ; \qquad (1.34)$$

altså at det økonomiske effektivitetsindeks afhænger én til én af det fysiske, men at der tillige indgår effekter fra præferencer, institutioner osv.

Set i dette lys burde man måske have kaldt effektivitetsindeksene for "faktorudvidende indeks" eller "faktorudvidende trends", for at undgå den vildledende konnotation til fysiske maskineffektiviteter, virkningsgrader o.lign.

I en model som EMMA kan det være vigtigt at trenderne er udformet som effektivitetsindeks, da det ellers kan være ret vanskeligt at indlægge en *x%* forbedring af f.eks. en brændselseffektivitet, som man måske en teknisk/ingeniørmæssig kilde til. Dette er ikke så nemt, hvis trenderne f.eks. er udformet som trends i omkostningsandelene.[17]

[17] Hagen ved effektivitetsformuleringen er så, at den *estimerede* (økonomiske) effektivitet indeholder alle leddene i (1.34) og derfor ikke kan fortolkes som om det kun var den "fysiske" effektivitet – og erfaringsmæssigt kan denne pointe være vanskelig at formidle, ikke mindst til ingeniører. Og desuden er der så det med eventuelle negative effektivitetsvækstrater.

6. Sammenfatning og note vedr. parametriseringer

Hvis man skal koge det helt ned til substansen kan man som *alternativ 1* estimere *K* og *L* i ADAMs *nm*-erhverv vha. en standard translog-omkostningsfunktion, hvorved man får estimeret en stigende trend i kapitalens omkostningsandel (på ca. 0.4%-points pr. år). Desuden vil man estimere en samlet produktivitetsvækstrate på ca. 3.5% i 1970, faldende til ca. 2% i 2000. De færreste vil finde et sådant estimationsresultat svært fortolkeligt. At kapitalens omkostningsandel stiger er der ikke noget nyt i (og 0.4%-points om året er vel ikke hårrejsende), og at den samlede produktivitetsvækstrate har været aftagende, er der heller ikke noget nyt i.

Papirets pointe er så, at hvis man som *alternativ 2* estimerer translog-omkostningsfunktionen vha. effektivitetsindeks, får man en negativ effektivitetsvækstrate for *K* (mellem ca. –4.5% til –6%), parret med en positiv effektivitetsvækstrate for *L* (mellem ca. 5% til 4%), mens den samlede produktivitetsvækstrate er præcis den samme som i alternativ 1.

Den samlede produktivitetsvækstrate er et (omkostningsandels-)vægtet gennemsnit af effektivitetsvækstraterne for *K* og *L*. Da der gælder, at (a) den samlede produktivitetsvækstrate er noget lavere end *L*'s effektivitetsvækstrate, og (b) at *K*'s omkostningsandel er relativt lille, indebærer (a) og (b) tilsammen, at *K*'s effektivitetsvækstrate er nødt til at være negativ, for at kunne trække den samlede produktivitetsvækstrate langt nok ned. At *K*-effektivitetsvækstraten er negativ udtrykker sådan set bare, at der historisk har været et stort tidsafhængigt *bias* over mod *K*. Dette er vist i

Figur 11, som heller ikke burde få mange øjenbryn til at løfte sig (på trods af, at figuren implicit indeholder en negativ *K*-effektivitetsvækstrate). Der henvises desuden til formel (1.26)-(1.29) samt Figur 3, som er gode at få forstand af, når det kommer til fortolkning af effektivitetsindeks.

Det er den *samlede* produktivitetsudvikling, som ikke bør estimeres til at være negativ (hvilket ville svare til tekniske tilbageskridt eller ”nedfindelser”), og ikke de enkelte indgående faktorudvidende effektiviteter. Fortegnet på disse indgående effektiviteter bør man være meget varsom med at fortolke uafhængigt af hinanden!

6.1 Valg af parametrisering

Ovenstående gennemgang har gjort det klart, at man løber ind i færrest fortolkningsproblemer med translog-omkostningsfunktionen, hvis denne parametriseres på standard-måden. Så får man en positiv trend i kapitalens omkostningsandel, og ingen vil tænke på, at denne ville kunne oversættes til en negativ effektivitetsvækstrate for *K*. Noget helt lignende gør sig gældende for CES-funktionen (som vist i papiret EBJ 13.02.06), hvor man også kan ”parkere” problemet ved at vælge en anden parametrisering end vha. direkte effektivitetsindeks på *K* og *L*.[18]

Dette kunne være et argument for at holde sig helt fra effektivitetsindeks, fordi man risikerer at løbe ind i negative effektivitetsvækstrater og deraf følgende misforståelser og fortolkningsproblemer.

Efter denne forfatters vurdering er der imidlertid mange fordele ved at bruge effektivitetsindeks, herunder at effektivitetsindeksene har den yderst nemme fortolkning, at hvis et effektivitetsindeks stiger med *x*%, så *kan* man alt andet lige producere det samme, selv om man bruger *x*% mindre af faktoren. Problemet opstår så, når der er flere effektivitetsindeks på samme tid. Hvis kapitalens effektivitet f.eks. falder med 5.7% og arbejdskraftens stiger med 3.9%, kan man altså producere det samme med 5.7% mere kapital og 3.9% mindre arbejdskraft. Er dette en produktivitetsforbedring? Det afhænger af, hvor meget kapitalen og arbejdskraften fylder i omkostningerne, og hvis kapitalen kun fylder lidt *er* der tale om et fald i de samlede omkostninger (=produktivitetsforbedring).[19]

En anden fordel ved effektivitetsindeks er, at man på en nem måde kan adskille specifikationen af enhedsisokvanten fra spørgsmålet om, hvorledes isokvanterne bevæger sig over tid eller med *Y*. Har man først specificeret sin enhedsisokvant (som altså kun afhænger af faktorpriserne), kan denne altid udbygges på konsistent vis vha. *t*- og *Y*-afhængige effektivitetsindeks. På den måde kan faktorefterspørgselssystemer opbygges mere modulært, større dele kan genbruges, og effektivitetsindeksene er direkte sammenlignelige og genbrugelige på tværs af funktionsformer (translog, CES, GL, osv.). At effektivitetsindeksene muliggør en komponent-tilgang er efter denne forfatters mening en særdeles vigtig pointe, når det kommer til praktisk programmering/estimation af ADAM- eller EMMA-ligninger.

[18] F.eks. kan man i CES-funktionen operere med en generel *Y*-effektivitet ”uden på” produktionsfunktionen, parret med en lineær trend i log(*K*/*L*)-forholdet. Jf. også diskussionen i afsnit 4.2. i nærværende papir.

[19] Hvis man vægter de (5.7%, –3.9%) med omkostningsandelene (0.157, 0.843) fås –2.4%, hvilket udtrykker faldet i omkostningerne. I virkelighedens verden vil de (5.7%, –3.9%) dog ikke være optimalt, idet der sker en ændring i de effektive priser. Så selv om man *kan* producere det samme på den måde, er det ikke sikkert, at man *vil* det, fordi en anden sammensætning kan være billigere/optimal. Med de estimerede elasticiteter bliver den optimale *KL*-ændring (+0.3%, –2.9%), og ændringen i de samlede omkostninger i optimum fås så ved at vægte med omkostningsandelene (0.157, 0.843), og også her fås –2.4%. At der i begge tilfælde fås det samme forklares i Appendiks A.

Men ulemperne kan selvfølgelig også blive for store, hvis brugerne er decideret utrygge ved eventuelle negative effektivitetsvækstrater på kapitalen (ADAM) eller elektriciteten (EMMA). I så fald kan det af denne grund være det fornuftigste at vælge en parametrisering, som ikke synliggør eventuelle anstødelige negative effektivitetsvækstrater. Men før man drager en eventuel konklusion om, at faktorudvidende effektivitetsindeks er for svære at forstå eller fortolke, skal man dog huske på, at disse har været brugt i årtier i vækstlitteraturen, og at man dermed implicit sætter spørgsmålstegn også ved dele af fortolkningerne i denne litteratur. I vækstlitteraturen har man rask væk opstillet produktionsfunktioner af typen $Y = \mathrm{F}(e_K K, e_L L)$ og bl.a. defineret begreberne Harrod- og Solow-neutrale tekniske fremskridt netop med udgangspunkt i denne parametrisering. Hvad man måske ikke i vækstlitteraturen har været så opmærksom på er, at vækstraten i e_K godt kunne gå hen og blive negativ, hvis man forsøgte at *estimere* sine ligninger!

I papiret EBJ+TTH 15.03.06 ses der nærmere på, hvordan resultaterne i nærværende papir kan indbygges i ADAM/PCIM, med særligt henblik på brugervenlige håndtag til styring af produktivitetsudviklingen og *K/L*-forholdet.

Se også papiret TTH 16.03.06 for flere detaljer om translog-funktion (herunder parametrene i denne), samt mere om aggregeringsteori og translog-funktionens sammenhæng til Törnqvistindekset.

Litteratur

Griliches/Intriligator (eds.) (1986): *Handbook of Econometrics*, vol. 3. North-Holland.

T. Thomsen (2000): "Short cuts to dynamic factor demand modelling", *Journal of Econometrics*, 97 (2000), s. 1-23.

Appendiks A. Effektivitetsudvikling og faktorsubstitution

Det er klart, at man for givne priser altid kan få ændringen i de samlede omkostninger (i %) ved at vægte ændringen (i %) i de enkelte produktionsfaktorer sammen med deres omkostningsandele. Dette er en simpel identitet, men som nævnt sidst i afsnit 5 samt i fodnote 19 kan ændringen i de samlede omkostninger også fås ved at vægte ændringen i *effektivitetsindeksene* sammen med omkostningsandelene.

Dette kan måske undre lidt, for de enkelte faktorer bevæger sig ikke nødvendigvis som spejlbilleder af effektivitetsindeksene, med mindre der er ikke er nogen substitution (Leontief-isokvanter). For når et effektivitetsindeks stiger med $x\%$, sker der også et fald i den *effektive* pris på faktoren, hvilket igen giver en substitutionseffekt oven i den rene/direkte effektivitetseffekt på $-x\%$.

Som nævnt i Thomsen (2000), formel (40), er der følgende sammenhæng mellem effektivitetsudvikling og faktorefterspørgsel:

$$\mathrm{dlog}(\boldsymbol{X}) = -(\boldsymbol{I}+\boldsymbol{E})\,\mathrm{dlog}(\boldsymbol{e}) \tag{1.35}$$

hvor $\boldsymbol{X}$ er en vektor af faktorefterspørgsler, $\boldsymbol{e}$ er en vektor af effektivitetsvækstrater, $\boldsymbol{I}$ er enhedsmatricen, og $\boldsymbol{E}$ er en matrix med partielle priselasticiteter. (Hvis der ikke er nogen substitution, svarende til $\boldsymbol{E} = \boldsymbol{0}$, får man den ”rene” eller ”direkte” effektivitetseffekt).

I vores konkrete tilfælde bliver dette til følgende:

$$\begin{pmatrix} 0.3\% \\ -2.9\% \end{pmatrix} = -\left[\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -0.56 & 0.56 \\ 0.11 & -0.11 \end{pmatrix}\right]\begin{pmatrix} -5.7\% \\ 3.9\% \end{pmatrix} \tag{1.36}$$

Da vi således har, hvor meget de to faktorer ændrer sig med, kan ændringen i de samlede omkostninger fås nemt ved at gange med omkostningsandelene. Der gælder som nævnt i starten (for givne priser), at

$$\mathrm{dlog}(\boldsymbol{C}) = \boldsymbol{s}'\,\mathrm{dlog}(\boldsymbol{X}) \tag{1.37}$$

hvor $\boldsymbol{s}$ er en vektor med omkostningsandele. I vores konkrete tilfælde fås altså:

$$-2.4\% = \begin{pmatrix} 0.157 & 0.843 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0.3\% \\ -2.9\% \end{pmatrix} \tag{1.38}$$

Men man får præcis det samme, hvis man ganger effektivitetsvækstraterne med omkostningsandelene og ændrer fortegnet, dvs.

$$-2.4\% = -\begin{pmatrix} 0.157 & 0.843 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -5.7\% \\ 3.9\% \end{pmatrix} \tag{1.39}$$

Forklaringen er, at i det første tilfælde udregner man

$$\mathrm{dlog}(\boldsymbol{C}) = -\boldsymbol{s}'\,(\boldsymbol{I}+\boldsymbol{E})\,\mathrm{dlog}(\boldsymbol{e}) \tag{1.40}$$

Og her gælder der altid, at $\boldsymbol{s}'\,\boldsymbol{E} = \boldsymbol{0}$. Hvilket igen skyldes, at $\boldsymbol{E}$ er underlagt Slutsky-symmetri og at rækkerne summer til nul. Derfor reducerer (1.40) til

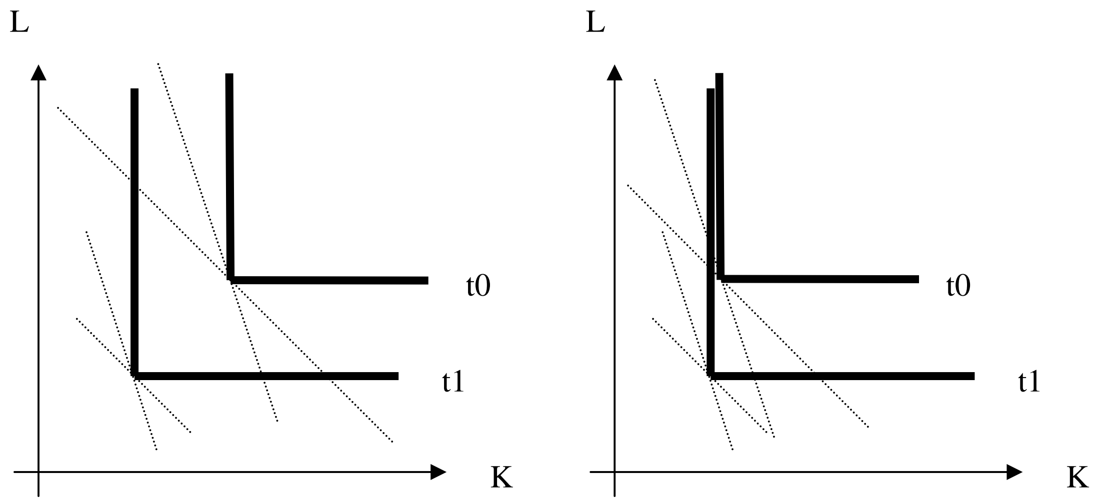
$$\mathrm{dlog}(\boldsymbol{C}) = -\boldsymbol{s}'\,\mathrm{dlog}(\boldsymbol{e}), \tag{1.41}$$

som er (1.39). Intuitionen i dette er, at den direkte effekt via $\boldsymbol{I}$ giver den egentlige omkostningsbesparelse, mens substitutionseffekten via $\boldsymbol{E}$ foregår langs en isokvant, hvilket for infinitesimale ændringer i $\boldsymbol{e}$ vil sige langs isokostkurven – og derfor ikke ændrer omkostningerne.

Appediks B. Produktivitetens afhængighed af de relative faktorpriser

Det kan måske virke mærkeligt, at produktivitetsvækstraten afhænger af de relative faktorpriser. Dette er dog et helt generelt resultat, når der er tale om biased tekniske fremskridt. Vi viser dette i et stiliseret tilfælde med Leontief-isokvanter.

Figur B1. Unbiased og biased tekniske fremskridt



I den venstre figur er de tekniske fremskridt unbiased, og omkostningerne falder med samme antal procent (konkret: 50%) ligegyldigt om den relative pris på *K* er høj eller lav (høj = de stejle isokostlinjer).

Den højre figur illustrerer biased tekniske fremskridt, konkret svarende til at arbejdskrafteffektiviteten fordobles. I dette tilfælde er det ikke ligegyldigt, hvad den relative faktorpris er, dvs. hældningen på isokostlinjerne. Jo højere prisen på *K* er (= jo stejlere isokostlinjer), jo mindre slår disse biased tekniske fremskridt ud i de samlede omkostninger (målt i %).